This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Q113
R65
v.1
MATH

GUSTAVE ROBIN,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

RÉUNIES ET PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Par Louis RAFFY,
PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

THÉORIE NOUVELLE DES FONCTIONS,

EXCLUSIVEMENT FONDÉE SUR L'IDÉE DE NOMBRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

GUSTAVE ROBIN.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES.

THÉORIE NOUVELLE DES FONCTIONS,

EXCLUSIVEMENT FONDÉE SUR L'IDÉE DE NOMBRE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
26126 Quai des Grands-Augustins, 55.

GUSTAVE ROBIN,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

RÉUNIES ET PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Par Louis RAFFY,
PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

THÉORIE NOUVELLE DES FONCTIONS,

EXCLUSIVEMENT FONDÉE SUR L'IDÉE DE NOMBRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

(Tous droits réservés.)

BH

510.4
R655
v.1

Agricultural

AVERTISSEMENT.

Les *Œuvres scientifiques* de Gustave Robin forment trois Volumes.

Mathématiques : un Volume. *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.*

Physique : un Volume en deux fascicules.

1° *Physique mathématique* (Distribution de l'électricité, Hydrodynamique, Fragments divers).

2° *Thermodynamique générale* (Équilibres et modifications de la matière).

Chimie : un Volume. *Leçons de Chimie physique,* professées à la Faculté des Sciences de Paris.

Le présent Volume contient la *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* Il a été élaboré dans les dernières années de la vie de l'auteur. Mais l'idée maîtresse d'où il procède remonte beaucoup plus loin : à la fin de nos études au Lycée, nous étions d'accord, Robin et moi, sur ce principe que l'Analyse mathématique doit être constituée avec la seule idée de nombre, c'est-à-dire avec les entiers et les fractions, et que les prétendus nombres irrationnels, purs symboles de grandeurs géométriques incommensurables, doivent en être exclus.

C'est de ce principe, auquel nous n'avons jamais renoncé, que Robin s'inspira quand il eut à enseigner, en 1892-1893, les éléments de l'Analyse aux étudiants en Physique et

Chimie de la Faculté des Sciences de Paris. S'il n'en exposa que certaines conséquences à ses auditeurs, il continua d'y réfléchir pendant tout le temps que durèrent ses leçons et même après que son cours fut terminé : quelques mois plus tard, il avait arrêté dans son esprit toute la théorie que contient ce Livre.

Sachant qu'il ne consentirait jamais à l'écrire lui-même, je le décidai, pendant les vacances de 1894, à m'en exposer chaque jour, suivant ses réflexions du moment, telle ou telle partie : le tout fut pris en notes. C'est à l'aide de ces notes qu'a été établi le texte de la *Théorie nouvelle des fonctions*. Les matières ont été rangées dans un ordre logique; il a été aussi opéré quelques retouches; mais le fond de l'Ouvrage n'a pas été modifié et c'est la pensée même de Robin sur un sujet capital que l'on trouvera ici.

L'Introduction par laquelle s'ouvre l'Ouvrage me dispense d'en donner un aperçu. Je me bornerai à dire qu'il a été rédigé en vue de lecteurs possédant déjà une certaine habitude des Mathématiques, et capables, par conséquent, de suppléer quelques raisonnements intermédiaires. Toutefois, dans les premiers Chapitres, l'exposition a reçu la forme la plus explicite : de cette manière, on pourra se convaincre que la théorie nouvelle n'exige pas plus de développements de détail que n'en comporte la doctrine classique. Je l'ai d'ailleurs soumise à l'épreuve de l'enseignement, tant à la Sorbonne qu'à l'École Normale, sans que mes auditeurs, accoutumés pourtant à d'autres méthodes, y aient trouvé la moindre difficulté.

L. R.

THÉORIE NOUVELLE
DES FONCTIONS
EXCLUSIVEMENT
FONDÉE SUR L'IDÉE DE NOMBRE.

INTRODUCTION.

L'édifice logique qu'est une science de construction dépend essentiellement des notions qu'on met en œuvre pour le composer et du but qu'on lui assigne. Il faut donc dire d'après quelles vues nous entendons constituer l'Analyse mathématique et spécialement l'une de ses parties les plus importantes, la seule que nous exposerons ici : la Théorie des fonctions d'une variable réelle.

L'Analyse mathématique est la plus simple de toutes les sciences : elle repose sur une idée unique et irréductible, l'idée de nombre. Il s'en faut que les autres sciences de construction aient ce même caractère de simplicité. La moins complexe de ces sciences après l'Analyse, la Géométrie, est fondée sur un ensemble de postulats multiples, empruntés à l'expérience, et qui sont loin de rentrer tous dans le seul concept de l'étendue. Au contraire, on peut édifier l'Analyse tout *entière* sur la seule idée de nombre : on ne l'a pas fait encore, ainsi que nous l'expliquerons tout à l'heure ; nous le ferons au cours de cet Ouvrage.

Quant au but que nous assignons à l'Analyse, ce n'est pas le plus général qu'on puisse concevoir : il est, au contraire, absolument défini. Diverses grandeurs, que nous considérons comme mesurables, n'étant pas directement accessibles à l'expérience, il arrive souvent que les principes de la science particulière qui traite de ces grandeurs permettent d'établir des relations mathématiques entre les nombres inconnus qui les mesurent et d'autres nombres qui sont connus. Dégager de ces relations les nombres demandés sera pour nous le but de l'Analyse mathématique.

Nous allons d'abord donner à la notion de nombre toute l'extension nécessaire et préciser la nature des objets auxquels s'appliquera l'Analyse.

Ensuite nous exposerons les raisons qui nous font écarter de notre science, les unes comme inutiles, les autres comme injustifiés, des notions et des développements qui occupent une place centrale dans les traités modernes d'Analyse.

Enfin nous rappellerons deux faits capitaux, mis en lumière par la psychologie expérimentale, auxquels il nous suffira d'avoir constamment égard, pour poser, dans les termes les plus favorables à leur solution, les problèmes mathématiques auxquels conduit l'étude des grandeurs.

*
* *

Notre objet étant de constituer l'Analyse entière avec la seule idée de nombre, le nombre sera le seul élément sur lequel nous opérerons ; c'est-à-dire que toute lettre représentera toujours pour nous un nombre, au lieu d'être le plus souvent, comme dans les théories classiques, le signe d'une grandeur. C'est pourquoi, avant d'aller plus loin, il est indispensable, sinon de définir le nombre, ce qui est impossible, du moins d'en élucider le concept pour le purifier de tout alliage de notions étrangères.

Nous entendons clairement ce que veut dire *compter* ou *dénombrer* des objets distincts. Le *nombre* de ces objets, c'est la représentation que nous nous formons de leur ensemble lorsque nous faisons abstraction de tous les caractères qui les différencient. Les nombres dont nous acquérons la notion par cette voie sont appelés les *nombres entiers*. La théorie des nombres entiers n'a pas d'autre fin que d'enseigner diverses manières de compter des objets donnés, ou, inversement, que de trouver combien on doit prendre d'objets pour pouvoir les répartir en tels ou tels groupes. C'est là ce qu'on entend lorsqu'on parle de propriétés des nombres : pour s'en convaincre, il suffit de réfléchir un instant à l'énoncé des théorèmes même les plus ardus et les plus élevés de l'Arithmétique.

Plusieurs propriétés des nombres entiers interviennent dans l'Analyse. Aucune n'est plus souvent impliquée que celle-ci : *la suite des nombres entiers est illimitée*. Cela signifie que nous pouvons toujours imaginer un objet en sus de ceux sur lesquels se porte actuellement notre attention : il n'y a donc rien d'obscur dans cette proposition, où plusieurs ont voulu voir un insondable mystère. Ce n'est que l'application, faite au plus simple et au plus rudimentaire de tous les cas, de notre faculté d'imagination.

Sur la seule notion de pluralité, c'est-à-dire d'objets distincts, qui contient toute l'Arithmétique des nombres entiers, on a essayé de fonder une théorie des *fractions*. Dans cette théorie, les fractions sont des couples de nombres entiers qui jouissent par définition des propriétés qu'on leur découvre par voie de démonstration, lorsqu'on leur assigne pour origine la partition des grandeurs. On a constitué de la sorte un système cohérent, dans lequel on a cherché et réussi à éviter toute contradiction. Mais les fractions ainsi introduites ne peuvent pas être considérées comme des nombres. Or l'utilité des fractions consiste précisément en ce que, dans les applications, on les considère comme des nombres, aussi bien que les entiers. Nous rejetterons donc cette théorie purement verbale et nous allons chercher une autre voie qui nous conduise à la notion de *nombre fractionnaire*. Cette voie, nous la trouverons en restreignant l'indétermination des *objets* sur lesquels s'exerce le calcul. Nous ne considérerons plus ces objets simplement comme étant distincts, mais nous leur attribuerons en outre des propriétés (trois d'abord et bientôt une quatrième) qui sont communes à toutes les grandeurs mesurables et qui pourraient appartenir aussi à d'autres objets logiques.

Première condition. — Ils seront *équivalents ;* c'est-à-dire qu'on pourra les substituer les uns aux autres en vue de certaines fins déterminées.

Deuxième condition. — En les groupant d'une certaine manière (et ce n'est pas à l'Analyse, mais aux diverses sciences spéciales, qu'il appartient d'indiquer en quoi consiste ce groupement), on forme un nouvel objet, qui est défini d'une manière suffisante et complète par le nombre de ses parties aliquotes, c'est-à-dire par le nombre des objets équivalents qui le constituent.

Troisième condition. — Les objets (A), (A′), ... obtenus en groupant n, n', ... objets (a) peuvent eux-mêmes être groupés entre eux suivant le même processus et l'objet qui résulte de leur réunion est identique à celui qu'on formerait en réunissant directement les objets (a) qui composent (A), (A′), ... En outre, l'opération du groupement est réversible, c'est-à-dire qu'il existe un moyen de défaire les groupes formés, de façon à retrouver sans gain ni perte les éléments (a) d'où l'on était parti.

(Il va sans dire que les objets dont il est question ici ne sont pas les êtres concrets que nous offre la nature, mais les objets que nous déduisons par abstraction de ces êtres, en les dépouillant de certains caractères dont la présence pourrait les empêcher d'être conformes à la définition qui résulte de nos hypothèses actuelles.)

Les hypothèses que nous venons d'énoncer ne surchargent l'idée de nombre d'aucune notion complémentaire; remarquons bien, en effet, qu'elles consistent purement et simplement à appliquer l'idée de nombre à des objets d'une nature particulière. Elles nous permettent d'envisager le nombre d'un point de vue nouveau. Le nombre ne nous apparaît plus comme un total, mais comme un *nom* ou un *numéro d'ordre*. Les opérations élémentaires de l'Arithmétique n'ont plus pour but de *compter* des objets qu'on a réunis ou séparés par diverses combinaisons; elles ont maintenant pour fin de *créer* de nouveaux objets par divers groupements d'objets donnés. Le nombre qui est le résultat de l'opération est précisément le nom ou le numéro de l'objet que cette opération a servi à créer.

Cette nouvelle manière d'envisager le nombre entier nous conduit directement à la notion de *nombre fractionnaire;* voici comment. L'objet (A), formé par la réunion de n objets équivalents (a), peut être lui-même pris pour unité, c'est-à-dire appelé *un*. Chacun des objets (a) qui le composent sera dénommé *un* $n^{\text{ième}}$ et représenté par $\frac{1}{n}$; l'objet formé par deux objets (a) sera dénommé *deux* $n^{\text{ièmes}}$ ou $\frac{2}{n}$, ...; l'objet formé par p objets (a) sera dénommé p $n^{\text{ièmes}}$ ou $\frac{p}{n}$. Les noms abstraits $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{p}{n}$ qui nomment ces objets sont appelés *nombres fractionnaires* ou *fractions*.

Deux fractions sont *égales* quand elles nomment deux groupes composés du même nombre d'objets équivalents.

Ces définitions suffisent pour démontrer la propriété fondamentale des fractions : *Si une fraction $\frac{p}{n}$ a ses termes équimultiples de ceux d'une autre fraction $\frac{p'}{n'}$, elle lui est égale.* En effet, supposons p égal à θ fois p', n égal à θ fois n'. Groupons θ à θ les n objets (a); nous formons ainsi n' objets (a'), qui sont équivalents en vertu de nos hypothèses. Réunissons maintenant les n' objets (a'); nous formons ainsi un objet qui, par hypothèse, est identique à l'objet (A) résultant de la réunion directe des n objets (a). Cet objet (A) est, nous l'avons dit, pris pour l'unité. Par conséquent, d'après nos définitions, chacun des objets (a') doit être dénommé $\frac{1}{n'}$, et l'objet formé par le groupement de p' de ces derniers doit être appelé $\frac{p'}{n'}$. Mais celui-ci comprend juste autant d'objets (a) que l'objet dénommé $\frac{p}{n}$, savoir p, puisque p est égal à p' fois θ. Il lui est donc, par hypothèse, identique, ce que nous exprimons en disant que les deux fractions $\frac{p}{n}$ et $\frac{p'}{n'}$ sont égales.

Nous ne définissons pas l'addition des objets vagues que nous considérons. Additionner deux fractions ce ne sera donc qu'ajouter, au sens que ce mot aura dans chaque cas particulier, les deux objets que nomment ces fractions. Mais les propriétés dont ils sont doués par nos hypothèses suffisent pour démontrer que, additionner les deux objets $\frac{p}{n}$ et $\frac{p'}{n'}$, c'est réaliser l'objet dont le nom est $\frac{pn' + np'}{nn'}$.

De même, nous ne spécifions pas ce que c'est que fractionner l'objet unité; mais on saura, grâce à nos hypothèses, ce que c'est que prendre les $\frac{2}{3}$ de l'objet $\frac{5}{7}$, quand on connaîtra le processus par lequel on forme l'objet $\frac{5}{7}$ en partant de l'objet unité.

Ces indications, qu'il serait facile de développer, contiennent toute la théorie des fractions; de sorte que les trois hypothèses ci-dessus suffisent pour constituer cette partie de l'Analyse, qui est l'Arithmétique.

Mais on prévoit, dès maintenant, une sérieuse difficulté. En partant d'objets déterminés, au nombre de n, pour en constituer l'unité, nous ne pouvons concevoir et définir que les fractions dont le dénominateur est n ou un diviseur de n. On pourrait lever en partie cette difficulté si, au lieu de grouper les objets n à n pour en former des unités nouvelles, on les réunissait $1.2.3\ldots n$ à $1.2.3\ldots n$; on obtiendrait ainsi toutes les fractions de dénominateurs inférieurs ou égaux à $1.2\ldots n$. Mais les applications de l'Analyse aux phénomènes naturels exigent que l'on considère des fractions *à dénominateur indéfiniment croissant*. C'est en vain qu'on essaierait de tourner l'obstacle en prenant un nombre de plus en plus grand d'objets déterminés pour en constituer l'unité nouvelle; car, chaque fois qu'on augmenterait ce nombre, on changerait, par cela même, l'objet pris pour unité. Or, on s'aperçoit bien vite, en faisant des applications, que c'est précisément l'unité qui doit rester fixe dans tout le cours d'un calcul. C'est pourquoi nous allons imposer aux objets qui nous occuperont une dernière condition, qui, jointe aux trois autres, nous permettra de constituer l'Analyse proprement dite.

Quatrième condition. — Chaque objet peut être considéré comme un groupe formé d'un nombre *illimité* (c'est-à-dire arbitraire et aussi grand qu'on veut) d'autres objets équivalents entre eux.

Par là, notre conception première des fractions est un peu modifiée. Nous ne partons plus d'objets déterminés, indécomposables, pour composer, avec ces objets, l'objet unité. Nous suivons la marche inverse. Nous commençons par fixer l'unité et nous la décomposons en un nombre arbitraire de parties aliquotes, sans que jamais cette décomposition puisse, en vertu de la nature même des objets sur lesquels nous opérons, être considérée comme ayant un terme nécessaire. Du reste, rien n'est changé par là aux propriétés des fractions.

Il peut arriver que les objets particuliers dont nous venons de compléter la définition soient susceptibles de recevoir *deux destinations opposées* et deux seulement. Il peut alors être commode, sans que cela soit indispensable, de conserver dans les transformations qu'on fait subir à ces objets la trace de cette

double destination. Or, comme ces objets sont, d'après nos hypothèses, parfaitement caractérisés par le nombre qui est attaché à chacun d'eux, les transformations dont il s'agit se traduiront par des opérations numériques; et nous donnerons aux résultats de ces opérations le signe + ou le signe — suivant qu'après sa transformation finale l'objet a conservé sa destination primitive ou a reçu la destination opposée. Par exemple, multiplier 5 par — 3 ce sera effectuer l'opération qui consiste à tripler l'objet qui contient 5 unités de son espèce et à donner à l'objet triplé une destination opposée à celle de l'objet primitif. On déduirait sans peine de ce que nous venons de dire les règles du calcul des *nombres négatifs*.

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments nécessaires pour constituer entièrement l'Arithmétique et l'Analyse, et nous n'y ajouterons plus rien. Ces deux sciences ne reposent donc, nous y insistons, que sur l'idée de nombre. Seulement cette idée n'y est plus appliquée *à tous les objets dénombrables possibles;* elle n'est appliquée qu'à certaines catégories d'objets dénombrables, définies par les quatre hypothèses qui précèdent. Nous avons appris du même coup à reconnaître à quelles sciences peut s'appliquer l'Analyse : ce sont celles qui étudient les objets assujettis à ces quatre conditions. L'Arithmétique fondée sur les considérations précédentes est, à certains égards, une science beaucoup plus restreinte que la Théorie des nombres entiers. Quant à l'Analyse, dont l'objet principal est l'étude des fonctions, que nous définirons bientôt, c'est un prolongement de l'Arithmétique, une Arithmétique généralisée par l'introduction de fractions à dénominateurs illimités, c'est-à-dire arbitraires et aussi grands qu'on veut.

*
* *

En constituant l'Analyse tout entière avec la seule idée de nombre, nous en excluons deux idées qu'on est habitué à y voir intervenir, mais qui sont absolument distinctes de l'idée de nombre et qui, transportées de l'étude des grandeurs dans le domaine de l'Analyse, ont faussé l'esprit de cette science et l'ont

fait dévier, soit vers des développements relatifs à des grandeurs, soit vers des développements purement verbaux : ce sont les idées d'*infiniment petit* et de *limite*.

D'après la définition que nous avons donnée des fractions, il est très facile de décider si une fraction est plus petite qu'une autre; mais on ne peut pas dire qu'il y ait des fractions *infiniment petites* ou *tendant vers zéro,* ni même qu'il y ait des fractions petites et voisines de zéro. En fait, il ne peut pas y avoir de fraction tendant vers zéro, car chaque fraction représente un objet, tandis que zéro est le signe de l'absence de tout objet. On ne peut pas dire non plus qu'aucune fraction soit voisine de zéro; car, du point de vue purement numérique où nous sommes placés, nous ne pourrions juger de l'intervalle qui existe entre zéro et cette fraction que par le nombre de fractions susceptibles de s'y intercaler : or on peut y en intercaler autant qu'on veut. De là suit que cette expression *une fraction aussi petite qu'on veut* n'a aucun sens par elle-même. Néanmoins, nous pouvons lui en attribuer un, en l'employant pour désigner une fraction dont le numérateur ne dépasse pas un certain entier déterminé et dont le dénominateur est un nombre aussi grand qu'on veut. C'est là une pure définition de mots, qui ne préjuge nullement que l'objet représenté par la fraction en question occupe dans l'espace une petite étendue, vu que cet objet peut, en particulier, ne pas rentrer dans la catégorie de l'espace.

Quant à la notion même d'*infiniment petit,* dont nous n'avons pas besoin pour constituer l'Analyse, nous la laisserons à la théorie des grandeurs : aussi bien, d'ailleurs, n'est-elle pas autre chose qu'un des aspects de la notion de *limite*, à laquelle nous arrivons maintenant.

Rappelons d'abord en quoi consiste le concept de *limite*. On imagine une suite indéfinie de grandeurs de même espèce (G), (G′), ... qui finissent par différer de moins en moins les unes des autres, et l'on affirme l'existence d'une grandeur (Γ) de même espèce, unique et déterminée, dont (G), (G′), ... s'approchent de plus en plus. C'est cette grandeur (Γ) qu'on appelle leur *limite*. Parfois l'existence de cette grandeur est démontrable; dans les cas où elle n'est pas démontrée, on l'admet. Il est à peine besoin de faire remarquer que, dans le dernier cas, cette

conception ne s'impose nullement à l'esprit et qu'on est en droit de se refuser à l'admettre. Car, concevoir un objet matériel, c'est ou bien se le représenter directement, ce qui est évidemment impossible dans le cas actuel, nos représentations de grandeurs de plus en plus voisines finissant par se confondre; ou bien *se figurer* une suite d'opérations permettant de réaliser cet objet, qu'on pourra, dès lors, imaginer nettement; or, il n'est pas possible de se figurer, comme il le faudrait ici par hypothèse même, des opérations qui se renouvellent indéfiniment sans avoir jamais de terme. Quelque opinion que l'on ait d'ailleurs sur la valeur objective de ce concept, on est forcé de reconnaître qu'il est absolument sans rapport avec l'idée de dénombrement. Cela seul suffirait à motiver son exclusion; mais il y a plus. Dès les commencements de l'Analyse, on voit se manifester un profond désaccord entre l'idée de nombre et celle de *grandeur-limite*. Tandis qu'on peut, en effet, sans contradiction logique, admettre que toute suite de grandeurs dont les différences mutuelles vont en s'évanouissant tend nécessairement vers une grandeur limite, on démontre, en toute rigueur, que des nombres formant une suite indéfinie peuvent différer insensiblement les uns des autres sans toutefois tendre vers aucun nombre énonçable. C'est là une seconde raison pour nous d'écarter la notion de limite, en ce qu'elle a de postulatif, puisque nous voulons constituer un corps de doctrine, *un* dans son principe, sans mélange d'éléments hétérogènes. Nous n'emploierons le mot *limite* que pour désigner, *quand il existe,* le nombre dont s'approchent de plus en plus les termes d'une suite convergente [1].

Il n'y a pas autre chose au fond que l'idée de *limite* dans la notion générale des *grandeurs incommensurables* avec l'unité, notion d'origine exclusivement géométrique, que nous allons discuter. Sans doute, la plus anciennement connue des grandeurs dites *incommensurables,* celle qui a donné lieu à la conception de toutes les autres, la diagonale du carré construit sur l'unité de

---

[1] Nous l'emploierons aussi, *mais dans d'autres sens,* pour désigner soit des nombres dont l'existence aura été démontrée et qui seront ou supérieurs ou inférieurs à certains autres (*limite supérieure, limite inférieure*), soit certains nombres *donnés* pour définir un intervalle, par exemple un champ d'intégration.

longueur, ne se présente pas comme une grandeur limite. Mais l'immense majorité de celles qu'on a considérées depuis (telle, par exemple, la longueur de la circonférence de rayon un) n'ont pu être conçues que comme des grandeurs limites; et, à ce titre, leur existence est un pur postulat, qu'il nous est loisible de rejeter. Quant à celles qui, plus analogues à la diagonale du carré, ne se présentent pas comme des grandeurs limites, mais s'offrent d'emblée, toutes faites, rien ne nous oblige à les déclarer incommensurables avec l'unité. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler combien sont nombreux les postulats qui servent de fondements à la Géométrie, et dont deux particulièrement, celui d'Euclide sur les parallèles et celui de Thalès sur les lignes proportionnelles, jouent un rôle capital dans la mesure des longueurs. C'est donc un postulat qu'on énonce, quand on affirme l'existence de grandeurs incommensurables.

Une fois cette notion admise et consacrée par une longue tradition, au lieu d'avouer avec les géomètres anciens qu'il est impossible de maintenir un parallélisme rigoureux entre la théorie des nombres et celle des grandeurs, et d'accepter cette opposition comme inévitable et inhérente à la nature des choses, on a essayé de l'atténuer autant que possible, ou même de la supprimer complètement; en quoi faisant, on a introduit dans la science du nombre des éléments étrangers au nombre et confondu le nombre avec la grandeur. Car, de l'aveu même des auteurs qui font de la théorie des prétendus *nombres irrationnels* le fondement de l'Analyse, il n'y a point de *nombres* qu'on puisse appeler ainsi; et quand, pour donner un point de départ à cette théorie, on dit que certaines opérations *définissent* un nombre irrationnel, on n'exprime rien. On commet seulement une impropriété de langage, par oubli de la signification du mot *définir*. Dans les sciences de construction, définir un objet, c'est donner le moyen de le concevoir. Or, on aura beau retourner la prétendue définition ci-dessus, elle ne répondra jamais à cette question : Qu'est-ce qu'un nombre irrationnel? Ainsi la théorie dont nous parlons est sans objet, en tant que théorie numérique.

De quoi traite-t-elle donc en fait? Quand on expose ses commencements, on traite inconsciemment, mais exclusivement, des grandeurs : les symboles auxquels on croit faire désigner des nombres

représentent en réalité des grandeurs, les unes mesurées, celles dont les symboles figurent dans les suites convergentes; les autres incommensurables avec l'unité, celles que masquent les mots *nombre irrationnel.* Passé l'addition, où les symboles employés ne représentent plus même des grandeurs mesurables quelconques, mais seulement des longueurs rectilignes, la théorie ne répond à rien : elle n'est plus qu'un pur exercice de raisonnement, exécuté sur des définitions de mots, une succession de phrases dont aucune ne contredit une proposition antérieure.

Pour donner à ses déductions une valeur autre qu'une valeur formelle, au sens logique du mot, il faudrait les appliquer résolument aux grandeurs, ne plus vouloir que toute lettre soit le substitut d'un nombre, mais en faire le symbole d'une grandeur. Si l'on parvenait à donner, pour les opérations à effectuer sur les grandeurs considérées, des définitions qui fussent représentables à l'imagination, on pourrait ainsi constituer une science qualitative de ces grandeurs, mais on renoncerait à les évaluer numériquement, à les *mesurer,* ce qui est le but que nous assignons à l'Analyse.

Le lecteur sait maintenant pourquoi nous ne parlerons plus désormais des *nombres irrationnels.* Il est à peine besoin d'expliquer que cette exclusion n'empêchera nullement notre Analyse de représenter les grandeurs dépendantes, quand les grandeurs variables passent par les états où elles sont incommensurables avec l'unité. Bien que rien n'oblige, nous l'avons vu plus haut, à admettre l'existence de pareils états de grandeurs, accordons-la néanmoins; il n'y a aucune difficulté, si les états qui correspondent, pour les grandeurs dépendantes, aux états d'incommensurabilité des grandeurs variables ne présentent pas de discontinuité avec les états adjacents. Si, pour un état d'incommensurabilité de la grandeur variable, on suppose qu'il y ait saut brusque de la grandeur dépendante, cette discontinuité ne sera pas observable, l'intervalle où elle se produit tombant, par définition même, au-dessous de toutes les limites de nos perceptions.

*
* *

Mais, si nous dénonçons hautement la confusion traditionnelle entre les nombres et les grandeurs, qui est le vice de la Mathématique moderne, nous n'en serons que plus attentifs à deux faits d'expérience capitaux, dans lesquels nous retrouverons d'ailleurs l'origine des deux notions que nous venons d'écarter, et qui indiquent comment il faut constituer l'Analyse, si l'on veut en faire, au lieu d'un jeu stérile de l'esprit, un instrument propre à la mesure des grandeurs.

Lorsqu'on décompose une grandeur concrète en parties aliquotes, il arrive un moment, lorsque ces parties sont en nombre suffisant, où chacune d'elles est imperceptible; elle est comme nulle pour nos sens. A chaque sensation correspond ainsi, dans des conditions données, un *minimum perceptible*. C'est en élaborant cette donnée expérimentale du minimum perceptible que l'on est arrivé à la conception d'infiniment petit, que nous avons précédemment écartée comme inutile à notre objet. Aussi bien n'insisterons-nous pas sur ce point, dont l'éclaircissement n'est nullement nécessaire à la constitution de l'Analyse pure.

Voici maintenant le second fait, aussi anciennement acquis que le premier, mais plus récemment analysé. Lorsque nous comparons deux grandeurs de même espèce (G) et (G′), dont l'une est fixe, si nous faisons varier progressivement (G′), de manière qu'elle diffère de moins en moins de (G), il arrive un moment où ces deux grandeurs ne se distinguent plus l'une de l'autre, au témoignage de nos sens. Mais, qu'on change les conditions de l'expérience, qu'on recoure à des procédés de comparaison plus délicats, on reconnaîtra qu'en général (G′) n'est pas devenue égale à (G). Pour que la différence entre (G′) et (G) soit perceptible, il faut que cette différence δ dépasse une certaine fraction de la grandeur (G). On pourrait être tenté de croire que cette *moindre différence appréciable* [1] est égale au minimum perceptible; mais l'expérience a montré qu'elle n'est pas constante :

---

[1] Le terme *fraction différentielle* est celui qui conviendrait le mieux ici; mais les psychophysiciens le définissent un peu autrement.

δ dépend de (G) et varie suivant une loi qui change avec la nature de (G); elle ne sera pas la même, par exemple, si (G) est un poids que si (G) est une durée ou une intensité lumineuse. Quoi qu'il en soit, c'est de cette notion expérimentale de la moindre différence appréciable, confusément aperçue de tout temps, que dérive l'idée de limite.

La connaissance des deux faits que nous venons de rappeler nous permettra, chaque fois que nous serons en présence d'un problème imposé au mathématicien par l'étude des phénomènes naturels, de le formuler en des termes qui en rendront la solution possible. Nous ne citerons, pour donner une idée de notre méthode, qu'une question, absolument fondamentale dans les applications de l'Analyse :

Trouver un nombre x tel que, si on le connaissait et si l'on faisait sur lui une série d'opérations arithmétiques dont $f(x)$ désignera le résultat, $f(x)$ fût égal à zéro.

C'est là ce qu'on appelle *résoudre l'équation* $f(x) = 0$. Or il est très rare que ce problème soit possible : il n'existe généralement pas de nombre répondant à la question proposée. Par contre, il arrive très fréquemment qu'on peut résoudre la suivante :

Trouver une suite indéfinie de nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots$ différant entre eux de fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut, tels de plus que les nombres $f(x_1), f(x_2), \ldots$ forment une suite dont tous les termes soient inférieurs en valeur absolue à des fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut.

Au point de vue du nombre pur, ce problème n'a aucun rapport avec le premier; mais il en est tout autrement dans les applications, quand x est, par exemple, la mesure d'une grandeur (G) et $f(x)$ la mesure d'une autre grandeur (Γ). Nous répondons d'une manière pratique à la question proposée tout d'abord, si nous prenons, au lieu du nombre x impossible à trouver, *l'un quelconque* des nombres $x_1, x_2, \ldots$ jouissant à la fois des deux propriétés suivantes : 1° leurs différences mutuelles sont inférieures à la plus petite valeur que le moindre écart appréciable, relatif à la grandeur (G), acquière dans un intervalle comprenant tous les nombres $x_1, x_2, \ldots$; 2° les nombres correspondants

$f(x_1)$, $f(x_2)$, ... sont inférieurs au minimum perceptible pour la grandeur (Γ). Cette solution répond d'ailleurs à toutes les exigences des applications possibles, puisque nous laissons indéterminées les plus petites valeurs des moindres différences appréciables et des minimums perceptibles, comme dépendant non seulement de nos sens, mais de la portée ou de la délicatesse de nos instruments de mesure, dont la perfectibilité ne peut pas être limitée à l'avance [1].

---

[1] Le problème de la mesure des grandeurs conduit à considérer des suites de nombres dont les différences mutuelles sont exprimées par ce que nous avons appelé des *fractions aussi petites qu'on veut*. En effet, quand on sait définir l'égalité et la somme de deux grandeurs d'une certaine espèce, *mesurer* une grandeur de cette espèce, c'est chercher si elle est *égale à la somme* de plusieurs grandeurs de son espèce, égales elles-mêmes à l'unité ou à une partie aliquote de l'unité. Pour appliquer cette définition, on compare la grandeur considérée à la somme d'un certain nombre d'unités et de parties aliquotes de l'unité, qu'on prend de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus distinguer leur somme de la grandeur à mesurer. La mise en œuvre de ce procédé, si on la conçoit comme prolongée autant qu'on le voudra, fournit précisément ces suites de nombres que nous étudierons sous le nom de *suites convergentes* et dont les différences mutuelles sont exprimées par des fractions qui deviennent aussi petites qu'on veut.

C'est sur l'emploi systématique des suites convergentes que nous fonderons toute l'Analyse, parce que nous assignons pour but à l'Analyse la détermination des grandeurs avec une approximation indéfinie. Or nous venons de voir que la mesure directe d'une grandeur, ainsi entendue, conduit à une suite convergente. Mais la correspondance est réciproque, et c'est là ce qui explique l'importance des suites convergentes dans notre théorie : *Toute suite convergente de nombres a_1, a_2, ..., a_n, ... définit une grandeur parfaitement déterminée et une seule.* Nous rappellerons brièvement la démonstration de ce fait capital, en raisonnant sur une longueur rectiligne. Sur une droite indéfinie OX on porte, à partir du point fixe O, les longueurs OA_1, OA_2, ... mesurées par les nombres a_1, a_2, ... On peut choisir n assez grand pour que toutes les longueurs OA_{n+1}, OA_{n+2}, ... diffèrent entre elles de moins d'une longueur donnée δ. A partir de cette valeur de n, toutes les extrémités A_{n+1}, A_{n+2}, ... sont comprises dans un segment de longueur δ. On peut ensuite prendre p assez grand pour que toutes les extrémités A_{n+p}, A_{n+p+1}, ... tombent dans un segment de longueur moitié moindre, compris dans le précédent. En continuant ainsi, on renferme toutes les extrémités des longueurs OA_{n+p+q} dans des intervalles, tous emboîtés les uns dans les autres, et qu'on peut rendre aussi petits qu'on veut, puisque chacun d'eux est au plus égal à la moitié du précédent. Ces intervalles évanouissants comprennent au moins un point fixe de la droite OX, et *ils n'en comprennent qu'un*; car, s'ils en comprenaient deux, A et B, aucun de ces intervalles ne pourrait devenir moindre que la distance AB, contrairement à ce que nous venons de prouver. Donc il existe une longueur OA et une seule que les nombres a_1, a_2, ..., a_n, ... mesurent avec une approximation indéfinie.

Les questions que nous aurons à traiter seront toutes plus ou moins analogues à celle qui précède. Elles seront presque toujours insolubles dans les termes mêmes où elles seront posées. Il faudra en transformer l'énoncé dans le sens où nous venons de le faire. Cependant nous continuerons à les traduire en termes algébriques sous la forme même où elles se présentent en premier lieu. La langue de l'Algèbre sera donc, et cela de par notre volonté, un mode d'expression foncièrement inexact, qu'il faudra sans cesse interpréter pour rétablir sa signification véritable. Ainsi toute équation $f(x) = 0$ devra être traduite par l'inégalité $|f(x)| < \varepsilon$; et nous nous appliquerons à résoudre ces inégalités avec le plus grand soin, loin de nous contenter des aperçus vagues par lesquels on prétend parfois encore établir la possibilité d'une solution, au mépris de ce principe de logique : dans les sciences de construction, démontrer qu'une chose est possible, c'est donner le moyen de la réaliser.

*
* *

D'ailleurs, en ne nous laissant pas abuser par les signes conventionnels de l'Algèbre et en nous refusant à jamais perdre de vue le nombre, nous ne faisons qu'ériger en principe les règles auxquelles les mathématiciens se conforment quand ils sortent du domaine de la théorie : tous en effet s'accordent, quand ils en viennent au calcul numérique, pour traiter les problèmes comme nous les posons. Ne vaut-il pas mieux être conséquent avec soi-même et ne point inscrire dans la théorie certains principes, pour en invoquer d'autres dans les applications ?

En développant les conséquences de la notion de nombre, sans jamais y mêler aucun élément étranger, nous arriverons à certaines propositions qui seront en contradiction avec des énoncés devenus classiques. Ces désaccords, hâtons-nous de le dire, sont sans conséquence pour les applications, car ils ne portent que sur des cas purement théoriques; ils n'ont rien d'ailleurs qui doive surprendre, et leur origine sera toujours la même. On s'autorise en effet, plus ou moins consciemment, de la considération des prétendus nombres irrationnels, pour attribuer aux fonctions cer-

taines propriétés que les grandeurs abstraites possèdent, d'après la conception qu'on en a admise et que nous avons discutée : c'est ce qu'on fait, par exemple, quand on parle d'une fonction qui serait nulle pour toute valeur entière ou fractionnaire de la variable x, et égale à l'unité pour toutes les valeurs irrationnelles de x; à moins que l'on n'objective une pure entité, après l'avoir soi-même reconnue comme telle. Dans notre Analyse, au contraire, les fonctions ne sont définies, à parler un instant le langage classique, que pour les valeurs rationnelles de la variable. Tout est là, et l'on ne peut demander à la Mathématique rigoureuse, ainsi constituée, que ce qu'elle peut logiquement produire.

CHAPITRE I.

SUITES CONVERGENTES ET SÉRIES NUMÉRIQUES.

Nous avons vu que la conception de la *limite* d'une suite de grandeurs différant de moins en moins les unes des autres n'est pas du domaine de l'Analyse. Mais cette idée suggère la considération de certaines suites indéfinies de nombres, que nous allons étudier sous le nom de *suites convergentes,* parce que toute la théorie des fonctions repose sur leurs propriétés.

I. — Premières propriétés des suites convergentes.

1. *Définitions.* — Considérons une suite indéfinie de nombres, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs,

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont chacun peut être calculé quand on connaît son rang. Ces nombres sont appelés les *termes* de la suite.

On dit qu'une pareille suite est *convergente* si ses termes finissent par différer de moins en moins les uns des autres; ou, pour préciser, *une suite est convergente si, étant donnée une fraction positive* ε, *aussi petite qu'on veut* [1], *il existe un entier* n, *tel que le terme de rang* n *diffère de tous ceux qui le suivent d'une fraction moindre en valeur absolue que* ε.

On peut dire aussi qu'*une suite est convergente, si deux quelconques de ses termes, à partir d'un certain rang, diffèrent l'un de l'autre d'une fraction aussi petite qu'on veut en valeur absolue.*

Ces deux définitions étant visiblement équivalentes, on pourra indifféremment recourir à l'une ou à l'autre.

[1] Nous appelons fraction *aussi petite qu'on veut* une fraction dont le numérateur ne dépasse pas un nombre fixe et dont le numérateur est aussi grand qu'on veut.

Un exemple simple de suite convergente est fourni par la progression géométrique décroissante

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots.$$

Les sommes de ses premiers termes,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + q, \quad S_3 = 1 + q + q^2, \quad \ldots.$$
$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

forment une suite convergente. Car la différence

$$S_{n+r} - S_n = q^n \frac{1-q^r}{1-q} < \left| \frac{2q^n}{1-q} \right|$$

est, pour n suffisamment grand, moindre que toute fraction ε aussi petite qu'on veut.

Il y a plus : la différence entre le nombre $\frac{1}{1-q}$ et le terme S_n, qui est précisément égale à $\frac{q^n}{1-q}$, jouit de la même propriété. Ainsi les termes de la suite considérée finissent par différer de moins en moins de ce nombre. Nous ne tarderons pas à revenir sur ce fait important.

2. Il faut, au préalable, se rendre bien compte de la nature des termes d'une suite convergente.

Théorème. — *Les termes d'une suite convergente finissent par être tous de même signe, à moins qu'ils ne tendent vers zéro.*

En effet, si, quel que soit n, il existe toujours, dans la suite deux termes de signes contraires u_n et u_{n+p}, comme la convergence entraîne

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon,$$

les deux termes u_{n+p} et u_n sont, en valeur absolue, moindres que ε. On trouvera donc indéfiniment, dans la suite, des termes qui différeront aussi peu qu'on voudra de zéro, et comme la suite est supposée convergente, tous ses termes jouiront de la même propriété. C'est ce qu'on exprime en disant qu'ils tendent vers zéro.

THÉORÈME. — *Les termes d'une suite convergente sont des fractions dont les dénominateurs finissent par dépasser tout entier donné, même quand elles sont réduites à leur plus simple expression. Il n'y a exception que si la suite présente indéfiniment des termes égaux à une fraction déterminée.*

Étant donné l'entier M, si grand qu'il soit, je dis qu'à partir d'un rang assignable tous les termes (sous la réserve énoncée) ont leurs dénominateurs plus grands que M. Soit en effet $\frac{\alpha}{\beta}$ un terme de la suite tel que tous ceux qui le suivent diffèrent entre eux de moins de $\frac{1}{M^2}$, et soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux de ces termes. On a

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right| = \frac{|ab' - ba'|}{bb'} < \frac{1}{M^2}.$$

Comme $ab' - ba'$ est un entier, cette inégalité entraîne $bb' > M^2$, dès que les deux fractions sont supposées inégales. Donc l'un au moins des dénominateurs b et b' est supérieur à M.

Si b et tous les dénominateurs suivants sont plus grands que M, la proposition est démontrée. Si l'un des dénominateurs b et b' est moindre que M, soit par exemple $b < M$, *tous* les termes de la suite qui viennent après $a : b$ ont leur dénominateur plus grand que M, sauf ceux qui se trouveraient être précisément égaux à $a : b$.

Si ces termes égaux à $a : b$ sont en nombre limité, tous les termes qui viennent après le dernier d'entre eux auront leur dénominateur plus grand que M. Il peut arriver qu'après tout terme de la suite, si élevé que soit son rang, il s'en trouve toujours d'autres égaux à $a : b$. Alors les autres termes finiront par différer aussi peu qu'on voudra de cette fraction et leurs dénominateurs seront plus grands que M.

Soit, pour exemple, la suite $S_1, S_2, \ldots, S_n$ déduite d'une progression géométrique ayant pour raison l'inverse d'un nombre *premier*

$$S_n = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}} = \frac{p^{n-1} + \ldots + p^2 + p + 1}{p^{n-1}}.$$

On voit que S_n est une fraction irréductible, et que ses deux termes sont très grands avec n.

3. Ce théorème appelle quelques remarques :

1° A mesure qu'on avance dans une suite convergente on rencontre toujours des dénominateurs nouveaux. Chaque fois que le fait se produit, il faut concevoir le plus petit commun multiple n de tous les dénominateurs déjà rencontrés, et considérer que chaque terme déjà vu de la suite représente un groupe d'objets, dont n constituent l'unité toujours fixe. Ce nombre n va en croissant, ce qui motive la quatrième condition imposée dans l'Introduction (§ I) aux objets que nous considérons. Ainsi, en concevant les suites convergentes, nous ne nous sommes pas écartés de l'idée de nombre.

2° Dans toute application on n'emploie qu'un certain nombre des termes d'une suite convergente. En effet, chaque résultat doit être calculé avec un certain nombre r de chiffres décimaux et non davantage. On saura donc quel est le dernier terme u_r de la suite qui devra être introduit dans les calculs : il est déterminé par cette condition, que, si on lui substitue n'importe lequel de ceux qui le suivent, les r décimales qu'on veut conserver dans le résultat ne soient pas modifiées. Seulement, dans l'exposition théorique, nous ne fixons pas d'avance le rang de ce dernier terme. C'est dans ce sens négatif, mais très précis, que nous entendons les mots *suite indéfinie*.

3° Il nous arrivera souvent d'appeler d'un même nom et de désigner par une même lettre u *l'un quelconque* des nombres d'une suite convergente à partir du terme u_r, *de rang suffisamment élevé,* que nous définissons à l'alinéa précédent. Il y a avantage à faire ainsi, car la lettre u peut se répéter en plusieurs endroits d'une formule, sans qu'on soit tenu de lui attribuer partout la même valeur. Il pourra fort bien arriver que les r décimales, demandées dans le résultat final, ne soient pas influencées si, pour u, l'on met ici le nombre u_{r+p}, ailleurs le nombre u_{r+q}, ... Il est même des cas où l'on est conduit presque nécessairement à agir de la sorte. Ainsi, quand, dans une formule, une même lettre u figure deux fois, ici multipliée par un million, là divisée par un million, on ne la remplacera pas, dans les deux cas, par le même nombre. D'ailleurs, en adoptant cette convention, nous ne faisons qu'appliquer le principe fondamental de tout langage : désigner par le même nom les objets qui ont une pro-

priété commune. C'est ici la propriété, que possèdent les termes de la suite, de s'équivaloir dans les calculs.

II. — Suites rationnelles et suites irrationnelles.

4. Nous avons maintenant à nous poser une question qui est vitale pour l'Analyse, car la réponse à cette question décide du sens dans lequel devra se développer l'Analyse tout entière.

Nous avons vu (Introduction, § II) qu'on peut concevoir la *limite* d'une suite indéfinie de grandeurs dont les différences mutuelles vont en s'évanouissant. Les suites convergentes de nombres jouissent-elles d'une propriété analogue? Étant donnée une suite convergente, existe-t-il un nombre déterminé, dont les termes de la suite diffèrent aussi peu qu'on le veut quand leur rang est assez élevé? La première fois que cette question se présente en Arithmétique, c'est à propos de la réduction des fractions ordinaires en fractions décimales, qui revient aux progressions géométriques décroissantes. Cette fois, la réponse, ainsi que nous venons de le rappeler (n° 1), est affirmative. Mais il n'en est pas toujours de même, ainsi que nous le prouverons, après avoir posé le problème en termes précis.

Étant donnée une suite indéfinie de nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

s'il existe un nombre A, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, tel que la différence $A - u_n$ devienne pour n suffisamment grand et reste ensuite toujours moindre en valeur absolue que toute fraction positive donnée ε, aussi petite qu'on veut, on dit que les termes de la suite *tendent vers* A et que A est la *limite* de la suite.

Tel n'est pas le cas des suites que nous allons considérer.

5. Théorème. — *Les racines $m^{\text{ièmes}}$, aux diverses unités décimales près, d'un nombre* A, *qui n'est pas une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, forment une suite convergente et ne tendent vers aucun nombre énonçable.*

Soient, en effet,

$$x_0, \quad \frac{x_1}{10}, \quad \frac{x_2}{10^2}, \quad \ldots, \quad \frac{x_p}{10^p}, \quad \ldots, \quad \frac{x_r}{10^r} \quad \ldots$$

ces racines calculées par défaut. Je dis qu'elles vont en croissant ou que, si r est plus grand que p, l'inégalité

$$\frac{x_r}{10^r} < \frac{x_p}{10^p}$$

est impossible. On en conclurait en effet

$$x_r + 1 \leqq 10^{r-p} x_p,$$

parce que la différence entre deux nombres entiers $10^{r-p} x_p$ et x_r est au moins égale à 1. Or on a

$$\frac{(x_r+1)^m}{10^{mr}} > \mathrm{A} > \frac{x_p^m}{10^{mp}},$$

d'où résulte

$$x_r + 1 > 10^{r-p} x_p,$$

contrairement à l'inégalité précédente. Donc les racines par défaut vont en croissant. Étant toutes moindres que $x_0 + 1$, elles forment une suite convergente (ainsi que nous le prouverons au n° 12). On verrait de même que les racines par excès vont en décroissant et forment une suite convergente [1].

Si l'une de ces deux suites, la première par exemple, avait une limite l, l'autre aurait aussi pour limite l, puisque la différence

$$\frac{x_r+1}{10^r} - l = \left(\frac{x_r}{10^r} - l\right) + \frac{1}{10^r}$$

se composerait de deux termes tendant vers zéro. De plus, la limite l serait supérieure à toute racine par défaut et inférieure à toute racine par excès; donc l^m serait, comme A, compris entre $\left(\frac{x_r}{10^r}\right)^m$ et $\left(\frac{x_r+1}{10^r}\right)^m$ et l'on aurait

$$|\mathrm{A} - l^m| < \frac{(x_r+1)^m - x_r^m}{10^{mr}}.$$

---

[1] Si, dans l'une de ces suites, tous les termes qui viennent après un certain terme lui étaient égaux, ce terme serait la racine *exacte* de A, contrairement à l'hypothèse.

Mais, quels que soient les deux nombres α et β, on a

$$\alpha^m - \beta^m = (\alpha - \beta)(\alpha^{m-1} + \beta\alpha^{m-2} + \ldots + \beta^{m-2}\alpha + \beta^{m-1}),$$

et, par suite, si $\alpha > \beta > 0$,

$$\alpha^m - \beta^m < m(\alpha - \beta)\alpha^{m-1},$$

d'où, dans le cas présent,

$$|A - l^m| < \frac{m}{10^r}\left(\frac{x_r + 1}{10^r}\right)^{m-1}$$

et, *a fortiori*,

$$|A - l^m| < \frac{m(x_0 + 1)^{m-1}}{10^r}.$$

Or cette inégalité, dont le premier membre n'est pas nul, puisque A n'est pas une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, est impossible; car, pour r suffisamment grand, 10^r dépasse tout nombre donné et, en particulier, le nombre

$$\frac{m(x_0 + 1)^{m-1}}{|A - l^m|}.$$

Donc les racines par défaut et les racines par excès forment deux suites convergentes, mais dont les termes ne tendent vers aucun nombre énonçable.

6. Ainsi, il existe deux grandes catégories de suites convergentes : les unes sont appelées *suites rationnelles,* les autres *suites irrationnelles.*

On dit qu'*une suite est rationnelle, quand ses termes tendent vers un nombre déterminé.* Une suite est convergente par le fait seul qu'elle est rationnelle.

On dit qu'*une suite convergente, dont les termes ne tendent vers aucun nombre limite, est irrationnelle.* Voici une proposition générale qui permet, dans certains cas, de reconnaître qu'une suite est irrationnelle.

7. Théorème. — *Les termes d'une suite étant supposés tendre vers un nombre* A, *si le terme* u_n *diffère de tous les suivants de moins de* ε, *la différence entre* A *et* u_n *est en valeur absolue moindre que tout nombre supérieur à* ε.

Soit en effet

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Si l'on avait

$$|A - u_n| = \varepsilon(1 + h) \qquad (h > 0),$$

on n'aurait qu'à choisir p tel que l'on eût

$$|A - u_{n+p}| < \varepsilon h.$$

De cette inégalité et de l'égalité précédente résulterait

$$|u_{n+p} - u_n| > \varepsilon,$$

contrairement à l'hypothèse.

Application. — Les nombres $u_1, u_2, \ldots$, qu'on déduit de l'expression générale

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

en faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, ..., forment une suite convergente. Car il est bien connu que la différence $u_{n+r} - u_n$ est, quel que soit r, inférieure à $\frac{1}{n}\frac{1}{n!}$. Je dis que *les termes de cette suite ne tendent vers aucun nombre énonçable.* Supposons en effet que la suite ait pour limite un nombre fractionnaire A : B. La différence entre cette limite et le terme u_n sera inférieure à tout nombre plus grand que $\frac{1}{n}\frac{1}{n!}$. On aura donc, si petite que soit la fraction positive h,

$$\frac{A}{B} - u_n < \frac{1+h}{n}\frac{1}{n!}.$$

J'ajoute que le premier membre de cette inégalité *n'est pas nul.* Car la suite $u_1, u_2, \ldots$ a ses termes croissants [1]. Choisissons n tel que $n!$ soit divisible par B. En multipliant l'inégalité par $n!$ on trouvera qu'un entier *positif* est inférieur à la fraction $\frac{1+h}{n}$; d'où l'impossibilité d'une limite.

---

[1] Si une suite rationnelle a ses termes croissants (ou décroissants), aucun d'eux ne peut être égal à la limite A; sans cela les termes qui suivent celui-là différeraient *de plus en plus* de A.

III. — Suites équivalentes.

8. La propriété d'*équivalence,* dont jouissent les termes de rang suffisamment élevé d'une suite convergente (n° 3), peut aussi appartenir aux termes de *deux* suites différentes, ce qui conduit à la notion de *suites équivalentes,* qui joue un rôle capital dans la théorie des fonctions.

Étant donnée une suite convergente

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

une autre suite

$$(2) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

est dite équivalente à la première, si la différence $v_n - u_n$ de deux termes de même rang est en valeur absolue aussi petite qu'on veut, lorsque ce rang est suffisamment élevé.

En d'autres termes, *deux suites convergentes sont équivalentes, si la suite formée par les différences de leurs termes de même rang a pour limite zéro.*

Il y a une infinité de moyens de former des suites équivalentes à une suite convergente donnée. On peut, par exemple, ajouter respectivement aux termes de cette suite ceux d'une suite quelconque ayant pour limite zéro. On peut aussi, dans la suite (1), changer arbitrairement l'ordre des termes, ce qui donnera la nouvelle suite

$$(1)' \qquad u_{r_1}, \quad u_{r_2}, \quad \ldots, \quad u_{r_n}, \quad \ldots.$$

Il est clair que les indices entiers $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ finissent, quelle que soit la loi du bouleversement des termes, par dépasser tout entier N, si grand qu'il soit, car il n'y a que N entiers qui soient inférieurs ou égaux à N. Cela étant, on voit immédiatement que les différences $u_{r_n} - u_n$ tendent vers zéro, à raison de la convergence de la suite (1). La suite (1)′ lui est donc équivalente.

9. Si deux suites convergentes ne sont pas équivalentes, les différences de leurs termes de même rang ne peuvent tendre vers zéro. Mais il y a plus.

THÉORÈME. — *Si deux suites convergentes*

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$(2) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

ne sont pas équivalentes, les termes de l'une sont tous, à partir d'un certain rang, plus grands que les termes correspondants de l'autre (¹).

En effet, supposons qu'au delà d'un rang *quelconque* n on pût trouver, dans les deux suites, des termes u_{n+p}, u_{n+q} et v_{n+p}, v_{n+q} vérifiant les inégalités

$$u_{n+p} > v_{n+p}, \qquad u_{n+q} < v_{n+q}.$$

Comme u_n diffère de tous les termes qui le suivent de moins de ε, et v_n diffère de tous les termes qui le suivent de moins de ε', les deux inégalités qui précèdent conduiraient à ces deux-ci

$$u_n > v_n - (\varepsilon + \varepsilon'), \qquad u_n < v_n + (\varepsilon + \varepsilon').$$

La différence $u_n - v_n$ serait donc moindre en valeur absolue que $\varepsilon + \varepsilon'$, et, comme n est quelconque, elle tendrait vers zéro. Les suites (1) et (2) seraient donc équivalentes, contre l'hypothèse.

10. L'importance de la notion de suites équivalentes tient à certaines propriétés de ces suites, notamment à celle que voici.

THÉORÈME. — *Si une suite convergente est rationnelle, toute suite qui lui est équivalente est rationnelle aussi. Toute suite équivalente à une suite irrationnelle est irrationnelle.*

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé. Or elle résulte immédiatement des définitions qu'expriment les inégalités

$$|A - u_n| < \varepsilon, \qquad |v_n - u_n| < \varepsilon',$$

(¹) Cette proposition interviendra dans la définition des fonctions.

où A désigne la limite de la suite $u_1, u_2, \ldots$. On en déduit en effet

$$|A - v_n| < \varepsilon + \varepsilon',$$

ce qui montre que la suite $v_1, v_2, \ldots$ a pour limite A.

Application. — Considérons la suite classique

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1 + \frac{1}{1}, \quad v_3 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \ldots, \quad v_{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \ldots.$$

Il ne serait pas facile de montrer directement qu'elle est *convergente* et *irrationnelle*. C'est ce qui résultera de la comparaison avec la suite

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{1}, \qquad u_3 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}, \qquad \ldots,$$

$$u_{m+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

à laquelle nous avons reconnu (n° 7) ces deux propriétés. En effet, il est bien connu qu'on a

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{m!} - \frac{1}{2m}\left[1 + \frac{\theta_1}{1} + \ldots + \frac{\theta_{m-2}}{(m-2)!}\right],$$

les θ étant des fractions comprises entre zéro et l'unité, et que les termes entre crochets ont une somme moindre que 3. D'où les inégalités

$$0 < u_{m+1} - v_{m+1} < \frac{3}{2m},$$

qui démontrent l'équivalence des deux suites.

11. Il ne faudrait pas s'abuser sur la portée de l'expression *suites équivalentes* et croire qu'on pourrait, *dans tout calcul*, substituer aux termes d'une suite convergente donnée les termes de toute autre suite équivalente. Ainsi, soit une suite convergente

$$(3) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots.$$

Sur chacun de ses termes u nous effectuons certaines opérations arithmétiques dont nous désignons le résultat par $f(u)$. Nous

déduisons ainsi de la suite (3) une nouvelle suite

$$(4) \qquad f(u_1),\ f(u_2),\ \ldots,\ f(u_n),\ \ldots$$

que nous supposons convergente. Substituons maintenant à la suite (3) une suite équivalente

$$(3)' \qquad v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

pour former, avec ses termes, ceux d'une quatrième suite

$$(4)' \qquad f(v_1),\ f(v_2),\ \ldots,\ f(v_n),\ \ldots.$$

Il peut parfaitement arriver que celle-ci ne soit pas équivalente à la suite (4) et même qu'elle ne soit pas convergente [1].

IV. — Propositions relatives à la convergence des suites.

12. Nous allons indiquer deux caractères auxquels on reconnaîtra la convergence de certaines suites et donner divers moyens de former des suites convergentes.

THÉORÈME. — *Si une suite indéfinie se compose de termes non décroissants et dont aucun ne surpasse un nombre déterminé, elle est convergente.*

Si une suite indéfinie se compose de termes non croissants et dont aucun n'est inférieur à un nombre déterminé, elle est convergente.

Supposons que chaque terme de la suite

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

soit supérieur ou égal au précédent et que, de plus, u_m soit inférieur, quel que soit m, à un nombre déterminé A. Je dis qu'il existe un entier n tel que l'on ait toujours

$$u_{n+r} - u_n < \varepsilon,$$

si petite que soit la fraction positive donnée ε. En effet, s'il n'en

---

[1] Cette proposition négative intervient dans la définition des fonctions.

est pas ainsi, c'est qu'à partir d'un certain rang p on a toujours

$$u_{p+r+s} - u_{p+r} > h,$$

h étant une fraction positive déterminée. Mais, puisque r et s sont quelconques, on peut supposer $s = 1$ et faire successivement $r = 0, 1, 2, \ldots$; d'où les inégalités

$$u_{p+1} - u_p > h, \quad u_{p+2} - u_{p+1} > h, \quad \ldots, \quad u_{p+r+1} - u_{p+r} > h,$$

qui entraînent

$$u_{p+r+1} > u_p + rh.$$

Pour r suffisamment grand, $u_p + rh$ surpassera A, contre l'hypothèse.

On établirait par un raisonnement analogue la seconde partie de l'énoncé.

13. La proposition qui précède n'est qu'un cas particulier de celle-ci, qu'elle sert à démontrer :

Théorème. — *Si la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

est telle que la somme

$$S_n = |u_1 - u_2| + |u_2 - u_3| + \ldots + |u_{n-1} - u_n|$$

ne dépasse jamais un nombre déterminé A, *quelque grand que soit* n, *cette suite est convergente.*

En effet, les sommes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ qui vont en croissant et dont aucune ne dépasse A, forment, d'après ce qu'on vient de voir, une suite convergente. Ceci s'exprime par l'inégalité

$$S_{n+p} - S_n = |u_n - u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p-1} - u_{n+p}| < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit *a fortiori*

$$|u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1} - u_{n+p}| = |u_n - u_{n+p}| < \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite proposée [1].

---

[1] Ce second criterium nous permettra d'établir rigoureusement la formule de Fourier.

14. Voici quelques moyens simples de former des suites convergentes, au moyen de deux suites convergentes connues :

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$(v) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots.$$

Les suites dont le terme général est $u_n \pm v_n$, ou $u_n v_n$ sont convergentes; il en sera de même de celle qui a pour terme général $u_n : v_n$, pourvu que la suite (v) ne tende pas vers zéro.

15. Du même ordre d'idées procède la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données des suites convergentes en nombre indéfini, qui se présentent dans un ordre déterminé,*

$$\begin{array}{lllllll}
(1) & a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, & \ldots, \\
(2) & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, & \ldots, \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
(i) & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n, & \ldots, \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
(j) & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & \ldots,
\end{array}$$

on prend dans chacune d'elles un terme, et un seul, pour en former une suite

$$(s) \qquad a_{n_1}, \quad b_{n_2}, \quad \ldots, \quad t_{n_i}, \quad \ldots, \quad v_{n_j}, \quad \ldots,$$

où les indices $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots$ *vont toujours en croissant. Si la suite ainsi obtenue est convergente, il en sera de même de toute suite*

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad t, \quad \ldots, \quad v, \quad \ldots,$$

où a *est un terme quelconque de la suite* (1) *venant après* a_{n_1}, b *un terme quelconque de la suite* (2) *venant après* b_{n_2}, ... *et ainsi des autres. De plus, toutes ces suites sont équivalentes à la suite* (s).

En effet, la différence $v - t$ de deux termes quelconques de la suite considérée peut s'écrire

$$(v - v_{n_j}) + (v_{n_j} - t_{n_i}) + (t_{n_i} - t).$$

Or la première et la dernière de ces trois différences tendent

vers zéro, à raison de la convergence des suites (j) et (i); car n_j et n_i, d'après l'hypothèse de l'énoncé, croissent indéfiniment avec j et i. Quant à la différence $(v_{n_j} - t_{n_i})$, elle tend aussi vers zéro à mesure que croissent j et i, parce que la suite (s) est supposée convergente. De là résulte que la proposée l'est aussi.

En outre, à partir d'un rang suffisamment élevé, l'un quelconque t de ses termes et le terme de même rang t_{n_i} de la suite (s) diffèrent, ainsi qu'on vient de le rappeler, d'aussi peu qu'on veut. Donc les deux suites sont équivalentes [1].

V. — Séries numériques.

16. *Définitions.* — Étant donnée une suite indéfinie de nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont chacun peut être calculé lorsque son rang est connu, ces nombres, ajoutés les uns aux autres dans l'ordre où ils se succèdent, constituent une *série* et sont appelés les *termes* de cette série.

On dit qu'une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est *convergente* si les sommes S_n des premiers termes de cette série, pris en nombre de plus en plus grand, forment une suite convergente.

Si les sommes S_n augmentent indéfiniment en valeur absolue avec n, ou, tout en restant finies, ont des différences mutuelles qui ne tendent pas vers zéro, on dit que la série est *divergente*.

Exemple. — On a déjà vu que les sommes S_n relatives à la progression géométrique décroissante

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \qquad (-1 < q < 1)$$

forment une suite convergente. Cette progression est donc une série convergente.

---

[1] Cette proposition nous servira fréquemment dans l'étude des fonctions.

Supposons maintenant que la raison q soit égale ou supérieure à 1; les sommes S_n augmentent indéfiniment avec n. La série est divergente.

Soit enfin $q = -1$, d'où la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Deux sommes S_n et S_{n+p} sont égales ou diffèrent de ± 1 suivant que p est pair ou impair. La série est donc divergente.

17. *Somme d'une série convergente.* — Nous ne considérerons désormais que des séries convergentes. Dans chaque problème où interviendra une pareille série, on n'aura besoin de connaître la somme de ses premiers termes qu'avec une certaine approximation donnée N^{-1}. Or, à partir d'un certain nombre de termes n, les sommes $S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+p}, \ldots$ diffèrent entre elles de moins de N^{-1}. On appelle *somme de la série* et l'on désigne par un seul et même symbole S l'une quelconque des sommes S_n, $S_{n+1}, \ldots$. Au contraire, aucune somme d'indice $< n$ ne devra être appelée somme de la série.

Si les sommes S_n tendent vers un nombre A, entier ou fractionnaire, comme c'est le cas pour la progression géométrique décroissante, on pourra prendre A pour somme de la série : en effet, la différence entre A et une somme S_n est aussi petite qu'on veut quand n est suffisamment grand (n° 7). Il y a d'ailleurs avantage à prendre A pour somme de la série : 1° parce qu'on aura ainsi affaire, soit à un entier, soit à une fraction dont les termes sont petits relativement à ceux des sommes d'indice élevé (n° 2); 2° parce que A sera une somme indépendante de l'approximation adoptée, tandis que, nonobstant l'existence de ce nombre A, la somme de la série sera une fraction à termes de plus en plus compliqués à mesure que l'approximation requise sera plus grande.

On appelle *reste* d'une série convergente la différence

$$R_{n,p} = S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}.$$

Quand les sommes S_n tendent vers un nombre A, on peut appeler *reste* la différence $R_n = A - S_n$.

18. *Séries à termes approchés.* — La plupart du temps les termes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ d'une série ne sont pas des *nombres*

fixes, mais font partie chacun d'une suite convergente. La notion de convergence et même celle de série seraient illusoires, si l'on ne pouvait, sans altérer profondément la série, remplacer chaque terme u_n par l'un quelconque des termes u'_n qui viennent après lui dans la suite convergente dont il fait partie. Nous allons montrer qu'*on peut faire en sorte que toutes les sommes* S'_n *ainsi formées diffèrent de l'ancienne somme* S_n *de moins d'une fraction positive* ε *aussi petite qu'on veut, pourvu que* n *soit suffisamment grand.* Il suffit pour cela de prendre n tel que la différence $u'_n - u_n$ soit en valeur absolue $< \frac{\varepsilon}{2n^2}$. En effet nous aurons alors

$$|S'_n - S_n| < \frac{\varepsilon}{2.1^2} + \frac{\varepsilon}{2.2^2} + \frac{\varepsilon}{2.3^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2.n^2},$$

ou, à plus forte raison,

$$|S'_n - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\right].$$

L'expression entre crochets peut s'écrire

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

On a donc bien $|S'_n - S_n| < \varepsilon$. Ainsi les séries que nous venons de définir seront toutes convergentes, si l'une d'elles est convergente et elles auront même somme; si l'une d'elles est divergente, elles seront toutes divergentes.

19. Nous allons maintenant tirer les premières conséquences qu'entraîne la définition des séries convergentes.

Cette définition revient à dire que, *étant donnée une fraction positive* ε *aussi petite qu'on veut, il existe un entier* n *tel que la différence entre* S_n *et* S_{n+p}, *prise en valeur absolue, soit moindre que* ε *pour toutes les valeurs positives de l'entier* p,

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Or $S_{n+p} - S_n$ n'est autre chose que

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Donc, *pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit*

que, n étant choisi suffisamment grand, la somme d'un nombre quelconque de termes venant après u_n soit en valeur absolue moindre que toute fraction donnée.

Cette condition générale, nécessaire et suffisante, n'est autre chose que la définition même de la convergence, énoncée en termes différents.

On en conclut immédiatement, en faisant $p = 1$, que *le terme u_n doit tendre vers zéro quand n augmente indéfiniment.* C'est là une condition nécessaire de convergence. Mais cette condition *n'est pas suffisante.* Car la série *harmonique*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

satisfait à cette condition. Or si l'on compare la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

avec la somme

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n},$$

on aperçoit immédiatement l'inégalité

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2},$$

qui prouve que *la série harmonique est divergente.*

Remarque. — Les séries à termes positifs n'ont qu'un mode de divergence : les sommes S_n croissent indéfiniment avec n. Car si elles étaient toutes moindres qu'un nombre fixe, comme elles vont en croissant, elles formeraient une suite convergente (n° 12).

20. Théorème. — *Une série, à termes tous positifs, étant convergente, si l'on change les signes de certains de ses termes, en nombre aussi grand qu'on veut, on forme une nouvelle série, qui est convergente.*

En effet, dans le reste $R_{n,p}$ relatif à la série proposée, sommons séparément les termes dont les signes seront conservés et ceux dont les termes seront changés; soient P et N les deux sommes. Puisque $R_{n,p} = P + N$ peut être rendu aussi petit qu'on

veut, il en est nécessairement ainsi de P et de N et, par suite, du reste $R'_{n,p} = P - N$ de la série modifiée.

THÉORÈME. — *Une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, décroissent constamment en valeur absolue à partir d'un certain rang et tendent vers zéro, est une série convergente.*

Considérons, en effet, la *série alternée*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2r} + u_{2r+1} - \ldots$$

et supposons

$$u_n > u_{n+1} > \ldots > u_{n+p} > \ldots.$$

Formons la différence

$$S_{n+p} - S_n = \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots - (-1)^p u_{n+p}]$$

Quelle que soit la parité de p, la parenthèse est positive et $< u_{n+1}$; donc $| S_{n+p} - S_n |$ tend vers zéro comme u_{n+1}.

Exemple. — La série *harmonique alternée*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \ldots$$

remplit toutes les conditions du précédent énoncé. Elle est donc convergente.

Mais si l'on donne le signe $+$ à tous ses termes, on obtient une série divergente, la série harmonique considérée ci-dessus.

21. Il y a donc des séries dont la convergence tient aux signes dont sont affectés leurs termes, les valeurs absolues de ces termes formant des séries divergentes. On les appelle séries *semi-convergentes,* par opposition aux séries dont les termes, pris tous en valeur absolue, forment des séries convergentes et qui ont reçu le nom de séries *absolument convergentes.* De ce nombre sont les progressions géométriques de raison négative > -1.

Voici deux propriétés contraires de ces deux sortes de séries, qui justifient leurs dénominations.

THÉORÈME. — *Si l'on change arbitrairement l'ordre des termes d'une série absolument convergente, les sommes* $S'_{n'}$ *des*

termes de la série modifiée et les sommes S_n *de ceux de la proposée forment deux suites équivalentes.*

Nous allons montrer qu'on peut trouver deux entiers m et m', tels qu'on ait

$$|S'_{m'+r'} - S_{m+r}| < \varepsilon,$$

quelque petite que soit la fraction donnée ε. Soit m un indice tel que la somme des *valeurs absolues* d'un nombre quelconque de termes venant après u_m soit $< \varepsilon : 3$. On aura *a fortiori*

$$|S_{m+r} - S_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dans la série modifiée, prenons un nombre m' de termes assez grand pour que parmi eux figurent *tous* les termes de S_m, avec d'autres, bien entendu. Ces derniers venant tous après ceux de S_m, leurs valeurs absolues ont une somme $< \varepsilon : 3$. Nous aurons donc

$$|S'_{m'} - S_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, quel que soit l'entier r', la somme $S'_{m'+r'}$ ne contient, en plus de $S_{m'}$, que des termes qui n'appartiennent pas à S_m; pris en valeur absolue, ils ont une somme $< \varepsilon : 3$. Donc

$$|S'_{m'+r'} - S'_{m'}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Des trois dernières inégalités résulte la première, qu'il s'agissait de vérifier.

22. Théorème. — *Si l'on change l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on peut, en les disposant convenablement, faire en sorte que leurs sommes successives aient telle limite qu'on voudra.*

Soient P_m et N_m la somme des termes positifs de S_m et la somme des valeurs absolues des termes négatifs de S_m. Je dis que les séries P_m et N_m sont divergentes. Car si elles étaient convergentes, on aurait, pour m suffisamment grand et quel que fût r,

$$|P_{m+r} - P_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |N_{m+r} - N_m| < \frac{\varepsilon}{2};$$

d'où résulterait

$$|P_{m+r}+N_{m+r}-P_m-N_m|<\varepsilon.$$

La série formée avec les valeurs absolues des termes de la proposée serait donc convergente, contre l'hypothèse. Si *une seule* des séries P_m et N_m était convergente, la proposée serait divergente. Ajoutons que les sommes P_m et N_m, composées de termes positifs, ne formant pas des suites convergentes, croissent *indéfiniment* avec m (n° 19, *Rem.*).

Appelons (P) et (N) les deux séries divergentes formées, l'une des termes positifs, l'autre des termes négatifs de la série proposée et donnons-nous un nombre arbitraire M. Dans la série (P), prenons le nombre de termes strictement nécessaire pour que leur somme surpasse M; puis dans la série (N), le nombre des termes négatifs nécessaires pour ramener la précédente somme au-dessous de M; puis assez de termes positifs pour dépasser de nouveau M, et ainsi de suite.

Soit S'_m la somme des m premiers termes de la série (S') ainsi formée. Les différences

$$\sigma) \qquad S'_1-M, \quad S'_2-M, \quad \ldots, \quad S'_m-M, \quad \ldots,$$

alternativement positives et négatives, tendent vers zéro. Car S'_m-M est au plus égale en valeur absolue au terme u_μ dont l'introduction dans la série (S') a causé le dernier changement de signe dans la suite (σ),

$$|S'_m-M|<|u_\mu|$$

et il est visible que, quand le nombre des variations de cette suite (σ) croît indéfiniment, il en est de même de l'indice μ; par suite, S'_m-M tend vers zéro, comme u_μ.

Remarque. — On pourrait encore, dans les séries (P) et (N), prendre successivement assez de termes pour que leurs sommes fussent tantôt $>A$, tantôt $<B$, A et B étant deux nombres différents, pris à volonté.

On pourrait aussi faire croître indéfiniment la somme des premiers termes de la série modifiée en faisant succéder à un nombre déterminé de termes négatifs un nombre de plus en plus grand de termes positifs.

CHAPITRE II.

DÉFINITION GÉNÉRALE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE. FONCTIONS FINIES.

Nous commencerons par donner une première idée de ce qu'on entend par *fonction d'une variable*. Si à l'un quelconque des nombres compris entre deux autres, a et b, nous faisons correspondre un nombre y, nous dirons que y est une *fonction* de x. Cette définition des fonctions est trop large en un sens et trop étroite dans un autre. Mais, avant de la modifier, il faut insister un peu sur les notions d'intervalle et de variable.

I. — Intervalles et variable.

1. *Intervalles.* — Étant donnés deux nombres a et b, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, le premier plus petit que le second ($a < b$), nous dirons d'un nombre x, compris entre a et b, qu'*il appartient à l'intervalle* (a, b). Cet intervalle est *rationnel;* ses deux *limites* sont les nombres a et b; son *amplitude* est la différence $b - a$.

Il y a lieu de considérer aussi des *intervalles irrationnels,* définis par deux suites convergentes irrationnelles, non équivalentes

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \ \ldots, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, \ \ldots. \end{array}$$

On a vu (Chap. I, n° 9) qu'à partir d'un rang n suffisamment élevé, tout terme de la première suite est, par exemple, plus petit que n'importe quel terme de la seconde. Nous désignerons par a et b deux quelconques des termes de l'une et l'autre suite, *de rang au moins égal à* n, et nous dirons qu'un nombre x *appartient à l'intervalle irrationnel* (a, b) s'il est plus grand que

tous les termes de la première suite et plus petit que tous ceux de la seconde, considérés à partir d'un certain rang.

2. *Variable.* — Nous donnerons un même nom à tous les nombres compris dans un intervalle (a, b) quand nous les ferons intervenir dans la définition d'une fonction. Nous appellerons chacun d'eux la *variable* et nous les désignerons tous par une même lettre x quand nous ne voudrons pas appeler l'attention sur l'un d'eux en particulier.

II. — Fonctions explicites et fonctions à déterminer.

3. *Fonctions explicites.* — Si à l'un quelconque des nombres x qui appartiennent à un intervalle (a, b) on fait correspondre une suite convergente connue, ainsi que toutes les suites équivalentes à celle-là, on dit que l'ensemble de toutes ces suites définit une fonction de la variable x dans l'intervalle (a, b).

Il est expressément convenu que, *si x' et x sont deux fractions équivalentes, les suites qui correspondent à x' doivent être équivalentes à celles qui correspondent à x.*

On représente par $f(x)$ un terme *quelconque,* pris à partir d'un rang *suffisamment élevé* dans l'une des suites qui correspondent à x; réciproquement, on dit que chacune de ces diverses suites *définit* la valeur $f(x)$ de la fonction pour la valeur x de la variable [1]. Cette valeur est unique en effet, les résultats devant être, dans chaque question, calculés avec un nombre déterminé de décimales. Si $f(x)$ doit être connu avec r décimales, par exemple, dans l'une des suites convergentes qui définissent $f(x)$, on choisira le premier terme qui diffère de tous les suivants de moins de 10^{-r},

---

[1] La présente définition nous conduira ultérieurement à certaines propositions contradictoires avec celles qu'on enseigne communément. Pour rétablir l'accord, on devrait définir autrement les fonctions. Ce n'est pas seulement à tout nombre déterminé x, mais à toute suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ comprise dans l'intervalle (a, b) qu'il faudrait faire correspondre le nombre que nous appelons la *fonction.* Mais ce serait sortir du domaine du nombre pur, où nous voulons nous tenir. En effet, si la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ était irrationnelle, en appelant $f(x)$ le nombre qu'on lui ferait correspondre, on ne désignerait par x aucun des termes de cette suite, ni même aucun nombre, et ce qu'on mettrait sous ce symbole ne serait pas autre chose, en réalité, qu'une grandeur.

et l'on ne prendra de ce terme $f_r(x)$ que la partie entière et les r premières décimales. On trouvera ainsi un nombre parfaitement déterminé y; c'est celui qui répond à la question. Il est évident que, si l'on opère de même sur l'une quelconque des suites équivalentes qui correspondent au nombre x, on trouvera toujours le même nombre y pour valeur de $f(x)$. Sous le bénéfice de ces observations, la convention annexée à notre définition des fonctions s'exprimera par la relation

$$f\left(\frac{\lambda p}{\lambda q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Remarque I. — Si, à chaque nombre x d'un intervalle (a, b) correspond *un* nombre fractionnaire parfaitement déterminé y, il pourra être avantageux de prendre ce nombre même pour $f(x)$; mais la fonction pourra toujours être considérée comme définie, pour chaque nombre x, par toutes les suites convergentes qui ont comme limite y.

Remarque II. — Quand il ne s'agira que des valeurs qu'une fonction, *supposée donnée,* prend pour les diverses valeurs de la variable, il suffira évidemment de faire correspondre à chaque x *une* suite convergente choisie à volonté parmi toutes celles qui définissent $f(x)$.

4. *Fonctions à déterminer.* — Le plus souvent, dans les applications, les fonctions ne s'introduisent pas directement, mais de la manière suivante. On considère plusieurs nombres $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ appartenant à un certain intervalle (a, b) et dont les uns $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont *quelconques* dans l'intervalle, tandis que les autres $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sont connus lorsque les premiers sont donnés. On demande de faire correspondre au nombre quelconque x, compris entre a et b, des nombres $f(x), \varphi(x), \ldots$, en nombre déterminé, de telle façon que certaines suites d'opérations arithmétiques, effectuées sur les nombres $x_1, \ldots, x_n, f(x_1), \ldots, f(x_n), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n), \ldots$, donnent toutes pour résultat zéro; ce que nous exprimerons par les équations

$$\begin{aligned}
&F[x_1, \ldots, x_n; f(x_1), \ldots, f(x_n); \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n); \ldots] = 0,\\
&\Phi[x_1, \ldots, x_n; f(x_1), \ldots, f(x_n); \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n); \ldots] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Un pareil problème comprend tous ceux que concernent les théories des équations *fonctionnelles,* des équations *aux différences finies,* et aussi des équations *différentielles,* qui ne sont que des dégénérescences de celles-ci.

Le cas le plus simple est celui où n se réduit à 1, et où l'on ne demande qu'un seul nombre $f(x)$ correspondant à x. On a alors l'équation

$$F[x, f(x)] = 0.$$

Mais déjà dans ce cas le problème est d'ordinaire insoluble. Nous en modifierons l'énoncé en nous proposant, ce qui sera presque toujours possible, de *trouver pour chaque nombre* x, *appartenant à l'intervalle* (a, b), *une suite convergente* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., *telle que les opérations dont* F *est le symbole, effectuées successivement sur les divers termes de cette suite en même temps que sur* x, *aient pour résultats une suite de nombres tendant vers zéro.* Nous dirons alors que le problème est *résolu par une fonction* $f(x)$, si toutefois les termes de *toute suite équivalente* à $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., soumis avec x aux opérations F donnent aussi pour résultats des nombres tendant vers zéro et si, de plus, ils satisfont toujours, comme ceux de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., à la condition qu'exprime la relation

$$f\left(\frac{\lambda p}{\lambda q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Voici la raison d'être de la première des restrictions énoncées ci-dessus : le problème fonctionnel dont dépend la mesure d'une grandeur peut comporter des solutions analytiques de formes diverses, tandis que notre conception de cette grandeur assigne à sa mesure une valeur unique. Il faut donc que les diverses suites qui résolvent le problème analytique soient équivalentes.

III. — Fonctions finies : limites, oscillation moyenne.

5. La notion de fonction, telle que nous venons de la définir, est très générale et devra être particularisée successivement. C'est à peine si elle est restreinte dans les *fonctions finies,* dont nous allons nous occuper.

Définition. — Une fonction définie dans un intervalle (a, b) a nécessairement une valeur finie pour chaque nombre x compris entre a et b. Mais il peut arriver que, ce nombre x étant choisi convenablement, la suite convergente qui définit $f(x)$ ait ses termes plus grands que tout nombre donné N. On dit alors que la fonction devient *infinie* dans l'intervalle (a, b). Au contraire, si les nombres que nous appelons $f(x)$ sont tous inférieurs en valeur absolue à un nombre A, quel que soit x entre a et b, nous dirons que la fonction $f(x)$ est *finie* dans l'intervalle (a, b). Les fonctions finies, malgré leur définition si peu restrictive, jouissent toutes de deux propriétés importantes : elles admettent des *limites* et elles ont une *oscillation moyenne déterminée.* La signification précise de ces mots résultera des théorèmes qui suivent.

6. Théorème. — *Si une fonction $f(x)$ est finie dans l'intervalle (a, b), on peut former une suite convergente de nombres*

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n, \quad \ldots,$$

jouissant des deux propriétés suivantes :

1° *Il est impossible de trouver entre a et b un nombre x tel que la suite convergente dont $f(x)$ est un terme quelconque ait, à partir d'un certain rang, ses termes supérieurs à aucun des nombres* $M_1, M_2, \ldots$;

2° *On peut, au contraire, déterminer au moins une valeur ξ telle que la suite qui définit $f(\xi)$ ait, à partir d'un certain rang, ses termes supérieurs à ceux de la suite*

$$M_1 - \varepsilon, \quad M_2 - \varepsilon, \quad \ldots,$$

ε étant une fraction positive aussi petite qu'on veut (1).

---

(1) Les fonctions $f(x)$ auxquelles s'appliquent ce théorème et le suivant doi-

En effet, considérons un nombre A, que la fonction n'atteint pour aucune valeur x comprise entre a et b. Diminuons ce nombre A successivement de ε, de 2ε, de 3ε, ... Nous obtiendrons des nombres qui tombent au-dessous de tout nombre donné; il faut donc qu'il existe un nombre x_1 tel que $f(x_1)$ soit supérieur à l'un d'eux, $A - n\varepsilon$, par exemple, tandis que le précédent $A - (n-1)\varepsilon$ surpasse encore $f(x)$, quel que soit x. Appelons M_1 le nombre $A - (n-1)\varepsilon$. Nous aurons

$$f(x_1) > M_1 - \varepsilon, \qquad f(x) < M_1.$$

Par $f(x_1)$ nous désignons un terme quelconque de la suite convergente qui correspond à x_1, pris assez loin pour que tous ceux qui viennent après lui vérifient la même inégalité.

Nous avons trouvé par un procédé particulier un nombre M_1 réalisant les conditions ci-dessus. Je dis que tout autre nombre M'_1, qui remplit les mêmes conditions, diffère de M_1 de moins de ε. Soit, en effet,

$$f(x'_1) > M'_1 - \varepsilon', \qquad f(x) < M'_1,$$

ε' étant inférieur ou égal à ε. Les inégalités

$$M'_1 > f(x_1) > M_1 - \varepsilon,$$
$$M_1 > f(x'_1) > M'_1 - \varepsilon'$$

entraînent visiblement

$$|M'_1 - M_1| < \varepsilon.$$

Cette remarque, sans laquelle la connaissance de M_1 serait illusoire, va nous servir immédiatement.

De même que l'on a trouvé M_1, on trouvera d'autres nombres M_2, M_3, ..., tels que chacun d'eux surpasse $f(x)$ quel que soit x et tels aussi qu'il existe des nombres x_2, x_3, ... satisfaisant aux inégalités

$$f(x_2) > M_2 - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad f(x_3) > M_3 - \frac{\varepsilon}{2^2}, \qquad \ldots.$$

Je dis que la suite M_1, M_2, M_3, ... est convergente. En effet, la différence entre M_1 et M_2 est, d'après ce que nous venons de voir,

---

vent évidemment être telles qu'on sache, étant donné un nombre B, décider s'il existe des nombres x satisfaisant à l'inégalité $f(x) > B$ ou à l'inégalité $f(x) < B$.

moindre que ε; pour la même raison la différence entre M_2 et M_3 est moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, et ainsi de suite. Si donc nous comparons un terme M_n à l'un des suivants M_{n+r}, nous aurons

$$|M_{n+r} - M_n| < \varepsilon\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+r-1}}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n-2}},$$

ce qui prouve la convergence de la suite.

Montrons maintenant qu'il existe entre a et b un nombre ξ tel que $f(\xi)$ soit supérieur à tous les nombres

$$M_1 - \varepsilon, \qquad M_2 - \varepsilon, \qquad \ldots,$$

à partir de l'un d'eux, celui de rang n par exemple. A cet effet partons de l'inégalité

$$f(x_n) > M_n - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}.$$

Comme on vient de trouver

$$|M_{n+r} - M_n| < \frac{\varepsilon}{2^{n-2}},$$

on aura *a fortiori*

$$f(x_n) > M_{n+r} - \frac{\varepsilon}{2^{n-2}} - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = M_{n+r} - \frac{3\varepsilon}{2^{n-1}}$$

et, par conséquent,

$$f(x_n) > M_{n+r} - \varepsilon,$$

pourvu que n soit égal ou supérieur à 3. Ainsi, à partir de $n = 3$, tous les nombres x_n que nous avons considérés satisfont à la question et peuvent être pris pour ξ.

Il est évident que toute suite équivalente à M_1, M_2, ... jouit des deux propriétés dont nous avons doué celle-ci.

7. *Limite supérieure et limite inférieure.* — Si la suite M_1, M_2, ... est une suite rationnelle, nous dirons que sa limite M est la *limite supérieure de la fonction* $f(x)$ dans l'intervalle considéré. Sinon, nous appellerons de ce nom l'un quelconque des termes de la suite M_1, M_2, ..., à partir d'un rang suffisamment élevé. On définirait d'une manière analogue la *limite inférieure* d'une fonction dans un intervalle.

Il peut exister une valeur x_s telle que la suite qui définit $f(x_s)$

soit équivalente à la suite $M_1, M_2, \ldots$. On dit alors que *pour cette valeur x_s la fonction $f(x)$ atteint sa limite supérieure.* Mais c'est là un cas exceptionnel : le plus souvent *une fonction ne peut pas atteindre sa limite* [1]. En voici un exemple simple, qui permet d'en concevoir une infinité d'autres, plus ou moins différents. Le trinome bicarré

$$1 - (x^2 - 2)^2$$

admet visiblement pour limite supérieure l'unité, mais n'atteint pas cette valeur, puisqu'il n'existe pas de nombre x dont le carré soit égal à 2.

8. Nous allons tirer du théorème précédent une proposition qui jouera un rôle important dans la théorie des dérivées, car elle donne le moyen de résoudre le problème qu'on énonce d'une manière vague en disant qu'on cherche le maximum de la fonction. C'est sur elle, en outre, que nous fonderons notre démonstration de la formule des accroissements finis et de celle de Taylor.

THÉORÈME. — *Si une fonction $f(x)$ reste finie dans l'intervalle (a, b) et si elle n'atteint pas sa limite supérieure (ou inférieure), on peut, dans l'intervalle (a, b), créer une série d'intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$, tendant vers zéro, dont chacun est compris dans le précédent et comprend un nombre pour lequel la fonction acquiert une valeur supérieure (ou inférieure) à celles qu'elle acquiert pour les deux limites de cet intervalle partiel.*

Divisons l'intervalle (a, b) en deux intervalles égaux (a, c) (c, b). Dans l'un au moins de ces intervalles, la limite supérieure sera évidemment la même que dans l'intervalle total. Soit (a_1, b_1) cet intervalle. Pas plus que les suites $f(a)$, $f(b)$, aucune des suites $f(a_1)$, $f(b_1)$ ne sera équivalente, d'après l'énoncé, à la

---

[1] Ce résultat est en opposition absolue avec celui qu'on enseigne habituellement. C'est dans cette contradiction qu'il faudra chercher l'origine des divergences qui se manifesteront, notamment dans l'étude des dérivées, entre notre théorie et la théorie classique.

suite $M_1, M_2, \ldots$ précédemment définie, non plus qu'aucune des suites $f(a_r)$, $f(b_r)$ correspondant aux limites des intervalles que nous allons former. Dès lors, les termes des deux suites $f(a_1)$, $f(b_1)$ sont tous, à partir d'un certain rang, inférieurs à ceux de la suite

$$M_1 - h, \quad M_2 - h, \quad \ldots$$

où h désigne un nombre qu'on peut calculer.

Mais, en vertu du théorème précédent (n° 6), il existe, dans l'intervalle (a_1, b_1), un nombre x_1 tel que les termes de la suite définissant $f(x_1)$ sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à ceux de la suite

$$M_1 - \varepsilon, \quad M_2 - \varepsilon, \quad \ldots,$$

où ε est aussi petit qu'on veut. On aura donc, pour ce nombre x_1,

$$f(x_1) > f(a_1), \qquad f(x_1) > f(b_1),$$

comme nous l'avions annoncé. En subdivisant l'intervalle (a_1, b_1) en deux autres égaux, et ainsi de suite, nous créons des intervalles à chacun desquels s'applique ce qui vient d'être dit. Ainsi, dans le $n^{\text{ième}}$, il existera un nombre x_n tel que l'on ait

$$f(x_n) > f(a_n), \qquad f(x_n) > f(b_n).$$

De plus, l'amplitude de cet intervalle étant égale à $\frac{b-a}{2^{n+1}}$, tend visiblement vers zéro, ce qui complète la démonstration.

Observons, en passant, que la suite des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que nous venons de considérer, est convergente, puisque

$$a_n < x_n < b_n.$$

Or les a_i non décroissants, mais moindres que b, et les b_i non croissants, mais plus grands que a, forment deux suites convergentes, qui sont équivalentes, parce que $b_n - a_n$ tend vers zéro. Mais la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ n'est généralement pas convergente. On pourra pourtant affirmer qu'il en est ainsi, quand la fonction $f(x)$ appartiendra à la classe des fonctions *continues dans un intervalle* que nous étudierons au Chapitre suivant.

9. *Oscillation dans un intervalle.* — Une fonction étant finie dans un intervalle (a, b), considérons les deux suites convergentes

$M_1, M_2, \ldots$ et $m_1, m_2, \ldots$ qui définissent sa limite supérieure et sa limite inférieure dans cet intervalle. Les différences $M_1 - m_1$, $M_2 - m_2, \ldots$ forment une suite convergente. Un terme quelconque ω de cette suite, à partir d'un rang suffisamment élevé, sera appelé *l'oscillation* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Ainsi l'on peut dire que l'oscillation d'une fonction dans un intervalle est l'excès de sa limite supérieure sur sa limite inférieure.

Si l'on divise l'intervalle (a, b) en plusieurs autres, l'oscillation dans chacun des intervalles partiels est au plus égale à l'oscillation dans l'intervalle total. En effet, la suite qui correspond pour chacun de ces intervalles à la suite $M_1, M_2, \ldots$ ne peut que lui être équivalente ou se composer de nombres plus petits; la suite analogue à $m_1, m_2, \ldots$ ne peut que lui être équivalente ou se composer de termes plus grands. Cela résulte des deux propriétés dont les suites $M_1, M_2, \ldots$ et $m_1, m_2, \ldots$ ont été douées d'après leur mode même de formation.

10. *Oscillation moyenne.* — Divisons l'intervalle (a, b) en n autres, $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, b)$, d'amplitudes $e_1, e_2, \ldots, e_n$, par des nombres croissants $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$. Appelons $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les oscillations de $f(x)$ dans ces divers intervalles, ω son oscillation dans l'intervalle (a, b). Formons la somme

$$\Omega_n = \frac{\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \ldots + \omega_n e_n}{b - a}.$$

Nous allons prouver que, *si le nombre des intervalles partiels est suffisamment grand et leur amplitude suffisamment petite, les sommes Ω_n diffèrent entre elles d'aussi peu qu'on veut, quelle que soit la loi de subdivision de l'intervalle total (a, b).*

Supposons d'abord que l'on subdivise cet intervalle en intervalles de plus en plus nombreux, en conservant comme limites de certains intervalles dans chaque division les limites de tous les intervalles de la division précédente. C'est là un premier mode de fractionnement qui donne lieu aux sommes

$$(1) \qquad \Omega_n, \quad \Omega_{n_1}, \quad \Omega_{n_2}, \quad \ldots, \quad \Omega_N, \quad \ldots.$$

Cette suite de nombres est convergente. En effet, lorsqu'on subdivise un intervalle e où l'oscillation est ω en plusieurs autres e',

e'', ..., où les oscillations sont ω', ω'', ..., on a visiblement

$$\omega' e' + \omega'' e'' + \ldots < \omega(e' + e'' + \ldots) = \omega e.$$

Ainsi les sommes Ω_n ne peuvent aller en augmentant; comme elles sont toutes positives, elles forment une suite convergente.

Concevons maintenant un autre mode de fractionnement analogue au premier; il donne naissance à des sommes

$$(2) \qquad \Omega'_{n'}, \quad \Omega'_{n'_1}, \quad \ldots, \quad \Omega'_{N'}, \quad \ldots,$$

qui forment une suite convergente.

On peut prendre n et n' assez grands pour que les différences de Ω_n avec les termes de la suite (1) et celles de $\Omega'_{n'}$ avec ceux de la suite (2) soient toutes moindres que η. Nous allons montrer que si ε est une fraction dépassant η d'aussi peu qu'on veut, on a

$$|\Omega_n - \Omega'_{n'}| < \varepsilon.$$

En effet, appelons α le plus grand des intervalles relatifs à Ω_N, et α' le plus grand des intervalles relatifs à $\Omega'_{N'}$. On peut prendre N et N' tels que α soit moindre que le plus petit des intervalles relatifs à $\Omega_{n'}$ et α' moindre que le plus petit des intervalles relatifs à Ω_n. Comparons alors Ω_N avec $\Omega'_{n'}$. Ceux des intervalles de Ω_N qui ne sont pas compris dans un intervalle de $\Omega'_{n'}$ sont en nombre au plus égal à n'. Leur part contributive dans la somme Ω_N est donc au plus égale à $n'\alpha\omega : (b - a)$. Les autres étant tous compris dans les intervalles de $\Omega'_{n'}$, leur part contributive est moindre que $\Omega'_{n'}$; d'où résulte l'inégalité

$$\Omega_N < \frac{n'\alpha\omega}{b-a} + \Omega'_{n'}.$$

Mais, d'après l'hypothèse faite sur n, on a

$$\Omega_n - \eta < \Omega_N;$$

d'où l'on conclut

$$(3) \qquad \Omega_n - \Omega'_{n'} < \eta + \frac{n'\alpha\omega}{b-a}.$$

En comparant $\Omega'_{N'}$ avec Ω_n, on trouvera de même

$$(4) \qquad \Omega'_{n'} - \Omega'_n < \eta + \frac{n\alpha'\omega}{b-a}.$$

Remarquons maintenant que α et α' sont deux nombres indépendants de n et n'. On peut, *n et n' étant fixés,* rendre α et α' aussi petits qu'on veut, ainsi que $n'\alpha$ et $n\alpha'$; dès lors, en vertu des inégalités (3) et (4), on aura bien

$$|\Omega_n - \Omega'_{n'}| < \varepsilon,$$

ε surpassant la fraction η d'aussi peu qu'on voudra.

Ainsi les sommes Ω_n diffèrent les unes des autres aussi peu qu'on veut, quelle que soit la manière dont on les a formées, pourvu que n soit suffisamment grand. Nous appellerons l'une quelconque d'entre elles l'*oscillation moyenne* de la fonction dans l'intervalle (a, b). Voici pourquoi. Si les n intervalles e_1, e_2, ..., e_n sont égaux, chacun d'eux a pour amplitude $(b - a) : n$ et Ω_n est bien la moyenne $(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) : n$ des oscillations dans les intervalles partiels. La proposition que nous venons d'établir est due à Riemann et s'énonce ainsi :

Théorème. — *Toute fonction, finie dans un intervalle, a dans cet intervalle une oscillation moyenne déterminée.*

CHAPITRE III.

FONCTIONS A OSCILLATION MOYENNE NULLE OU FONCTIONS INTÉGRABLES.

Parmi les fonctions finies, les plus importantes sont celles dont l'oscillation moyenne dans un intervalle est définie par une suite convergente ayant pour limite zéro. Nous les appellerons *fonctions à oscillation moyenne nulle,* ou *fonctions intégrables,* ces deux propriétés étant équivalentes. Nous insisterons sur deux grandes classes de fonctions à oscillation moyenne nulle : 1° les *fonctions continues dans un intervalle;* 2° les *fonctions à oscillation totale limitée,* parmi lesquelles figurent les *fonctions croissantes* ou *décroissantes dans un intervalle.*

I. — Condition pour qu'une fonction soit intégrable.

1. *Fonctions intégrables.* — Considérons une fonction $f(x)$, *finie* dans un intervalle (a, b), et soit (x_0, X) un intervalle compris dans le précédent. Divisons-le en n autres, (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, X) par des nombres croissants x_1, x_2, ..., x_{n-1}; prenons arbitrairement n nombres ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, un dans chaque intervalle partiel, et formons la somme

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(X - x_{n-1}).$$

Chacun des nombres $f(\xi_r)$ est un terme pris dans une suite convergente. Si ces n nombres diffèrent des suivants de moins d'une fraction η, et si l'on remplace chacun d'eux par l'un quelconque de ceux qui viennent après lui dans sa suite, la somme obtenue différera de la précédente de moins de $\eta(X - x_0)$. Ainsi à un nombre X correspondent des sommes S_n, S'_n, ... qui forment une suite convergente, lorsque le mode de division de l'intervalle (x_0, X) ainsi que les valeurs intermédiaires ξ_r ne changent

pas. Mais si l'on divise autrement l'intervalle (x_0, X), la suite convergente que le nouveau mode de division fait correspondre à X ne sera pas, en général, équivalente à la première. Quand *toutes* les suites obtenues par divers modes de division sont équivalentes entre elles, on dit que la fonction $f(x)$ est *intégrable* entre x_0 et X.

2. Théorème. — *Pour qu'une fonction $f(x)$, définie entre x_0 et X, soit intégrable dans cet intervalle, il faut et il suffit que son oscillation moyenne entre x_0 et X soit nulle* (Riemann).

Formons, en effet, une somme analogue à S_n, savoir

$$S'_{n'} = f(\xi'_1)(x'_1 - x_0) + \ldots + f(\xi'_{n'})(X - x'_{n'-1}).$$

Nous allons déterminer un nombre certainement supérieur à la valeur absolue de la différence $S'_{n'} - S_n$, nombre qui ne dépendra que des deux modes de division de l'intervalle (x_0, X) et nullement des valeurs intermédiaires ξ_r et $\xi'_{r'}$. Pour cela, nous introduirons les sommes

$$\Sigma Me, \quad \Sigma me, \quad \Sigma M'e', \quad \Sigma m'e',$$

où e désigne l'un des intervalles de la première division, M et m représentent ce que nous avons appelé les *limites supérieure et inférieure* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle e (Chap. II, n° 7); les lettres accentuées se rapportent à la seconde division. Les sommes ΣMe, $\Sigma M'e'$ sont appelées *sommes supérieures;* Σme, $\Sigma m'e'$ sont les *sommes inférieures.*

Nous prouverons que toute somme supérieure ΣMe est plus grande que toute somme inférieure $\Sigma m'e'$. Pour cela, superposons les deux divisions (n) et (n'); soient e'' les nouveaux intervalles résultant de cette superposition, M'' et m'' les limites de la fonction dans chacun d'eux. Il est évident que, lorsqu'on multiplie les intervalles en conservant les anciennes divisions, les sommes supérieures ne peuvent que décroître et les sommes inférieures ne peuvent que croître. De là résultent les inégalités

$$\Sigma m'e' \leqq \Sigma m''e'' < \Sigma M''e'' \leqq \Sigma Me,$$

qui établissent la proposition.

Cela posé, nous avons

$$\Sigma me < S_n < \Sigma Me,$$
$$\Sigma m'e' < S'_{n'} < \Sigma M'e'.$$

et, par suite,

$$|S'_{n'} - S_n| < \Sigma Me - \Sigma m'e',$$

ce que nous écrirons ainsi

$$|S'_{n'} - S_n| < (\Sigma Me - \Sigma me) + (\Sigma M'e' - m'e') - (\Sigma M'e' - \Sigma me).$$

Mais, d'après ce qui précède, le dernier binome est positif. On a donc, à plus forte raison,

$$|S'_{n'} - S_n| < \Sigma \omega e + \Sigma \omega' e' = \Omega_n + \Omega'_{n'},$$

ω et ω' étant les *oscillations* de la fonction dans les intervalles e et e'; Ω_n et $\Omega'_{n'}$ sont, au facteur $X - x_0$ près, les *oscillations moyennes* (Chap. II, n° 10) de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (x_0, X), pour les deux modes de division (n) et (n'). Le résultat est, comme on le voit, indépendant des nombres intermédiaires ξ_r, $\xi'_{r'}$. Il n'implique aucune hypothèse sur $f(x)$, si ce n'est que $f(x)$ soit *finie* entre x_0 et X.

Cela posé, nous savons que, quand les intervalles deviennent suffisamment nombreux et suffisamment petits, les sommes Ω_n, $\Omega'_{n'}$ diffèrent aussi peu qu'on veut. Si donc elles tendent vers zéro, la fonction $f(x)$ est intégrable. Cette condition est évidemment suffisante.

Je dis qu'elle est nécessaire. Considérons, en effet, un mode de division déterminé; soient e_r l'un des intervalles, M_r et m_r les limites supérieure et inférieure correspondantes. On peut, dans cet intervalle, trouver deux nombres ζ_r et ζ'_r tels qu'on ait

$$f(\zeta_r) > M_r - \varepsilon, \qquad f(\zeta'_r) < m_r + \varepsilon,$$

la fraction ε étant donnée aussi petite qu'on veut. On conclut de là

$$\Sigma f(\zeta_r) e_r > \Sigma M_r e_r - \varepsilon(X - x_0),$$
$$\Sigma f(\zeta'_r) e_r < \Sigma m_r e_r + \varepsilon(X - x_0),$$

et, par suite, Ω désignant l'oscillation moyenne,

$$\Sigma f(\zeta_r) e_r - \Sigma f(\zeta'_r) e_r > \Omega(X - x_0) + 2\varepsilon(X - x_0).$$

Mais $f(x)$ étant supposée intégrable, les deux sommes particulières qui figurent au premier membre diffèrent aussi peu qu'on veut, quand la division de l'intervalle (x_0, X) est poussée assez loin, ce qui entraîne $\Omega = 0$.

Le théorème est donc démontré. Rappelons la définition de M_r. C'est un terme quelconque d'une certaine suite convergente qu'on sait former; mais il doit être pris assez loin pour qu'il existe dans l'intervalle e_r un nombre ζ_r tel que la différence $M_r - f(\zeta_r)$ soit moindre que toute fraction ε, aussi petite qu'on veut, et que cette inégalité subsiste, une fois ε fixé, pour tous les termes qui viennent après M_r dans la suite en question. Nous avons démontré (Chap. II, n° 6) qu'il existe une suite $M_1, M_2, \ldots, M_r, \ldots$ jouissant de cette propriété.

II. — Fonctions continues dans un intervalle.

3. *Définition.* — On dit qu'une fonction $f(x)$ est *uniformément continue dans un intervalle* (x_0, X), ou plus brièvement qu'elle est *continue dans cet intervalle,* si, étant donnée une fraction positive ε aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un nombre positif α, tel que, pour deux nombres *quelconques* x, x' appartenant à l'intervalle et différant de moins de α, les valeurs de $f(x)$ et de $f(x')$ diffèrent entre elles de moins de ε.

Par $f(x)$ et $f(x')$, nous entendons deux termes des suites convergentes qui définissent $f(x)$ et $f(x')$, de rang n suffisamment élevé pour qu'ils satisfassent à l'inégalité

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

ainsi que tous ceux qui viennent après eux dans leurs suites respectives. Voici une manière de concevoir comment cette condition pourra être vérifiée. On peut toujours, à raison de la convergence des suites $f(x)$ et $f(x')$, assigner un indice n tel qu'on ait, quels que soient les entiers positifs p et p',

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_{n+p'}(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si, de plus, n peut être choisi assez grand pour qu'on ait aussi

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ces trois inégalités entraînent visiblement

$$|f_{n+p'}(x') - f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi pour $f(x)$ et $f(x')$ on pourra prendre $f_n(x)$ et $f_n(x')$ ou l'un quelconque des termes qui suivent ceux-là.

4. Théorème. — *Une fonction continue dans un intervalle* (x_0, X) *est finie dans cet intervalle.*

Prouvons qu'on peut assigner un nombre positif L tel qu'il n'existe entre x_0 et X aucun nombre x pour lequel $|f(x)|$ soit plus grand que L. A cet effet, subdivisons l'intervalle (x_0, X) en n autres $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, X)$ tels que dans chacun de ceux-ci les valeurs de la fonction diffèrent entre elles de moins de ε, et considérons un nombre quelconque x compris entre x_0 et X; il appartiendra à l'un des intervalles partiels, à (x_r, x_{r+1}) par exemple. Pour calculer une limite supérieure de $|f(x) - f(x_0)|$, écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_r) + f(x_r) - f(x_{r-1}) + \ldots + f(x_1) - f(x_0)|.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f(x_r)| + |f(x_r) - f(x_{r-1})| + \ldots + |f(x_1) - f(x_0)|,$$

et à plus forte raison

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(X) - f(x_{n-1})| + \ldots + |f(x_{r+1}) - f(x)| + |f(x) - f(x_r)| + \ldots + |f(x_1) - f(x_0)|.$$

Chacun des termes du second membre étant moindre que ε, nous concluons

$$|f(x) - f(x_0)| < (n+1)\varepsilon,$$

ce qui montre bien que $|f(x)|$ ne peut dépasser le nombre fixe $|f(x_0)| + (n+1)\varepsilon$.

5. Théorème. — *Si une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (x_0, X), on peut décomposer cet intervalle en d'autres assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction soit moindre qu'une fraction donnée η aussi petite qu'on veut.*

En effet, d'après la définition qui précède, il existe un nombre positif α tel que, pour deux nombres quelconques x, x', compris entre x_0 et X et différant de moins de α, on ait

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\eta}{3}.$$

Dans l'intervalle partiel d'amplitude α auquel appartiennent x et x', la fonction f admet une limite supérieure M et une limite inférieure m. On peut supposer que x et x' soient précisément parmi les nombres (Chap. II, n°s 6 et 7) pour lesquels on a

$$f(x) > M - \frac{\eta}{3}, \qquad f(x') < m + \frac{\eta}{3}.$$

Des trois inégalités résulte $M - m < \eta$.

La réciproque est évidente : *Une fonction étant définie dans un intervalle (x_0, X), si l'on peut décomposer cet intervalle en d'autres assez petits pour que dans chacun d'eux l'oscillation de la fonction soit moindre que toute fraction donnée, aussi petite qu'on veut, cette fonction est continue dans l'intervalle (x_0, X).*

De la propriété ci-dessus, qu'on pourrait prendre pour définition de la continuité, il suit immédiatement que *l'oscillation moyenne est nulle.* Si en effet les intervalles partiels sont assez petits pour que l'oscillation n'y dépasse pas ε, l'oscillation moyenne dans l'intervalle (x_0, X) sera inférieure à

$$\frac{\varepsilon e_1 + \varepsilon e_2 + \ldots + \varepsilon e_n}{X - x_0} = \varepsilon,$$

fraction qu'on peut prendre aussi petite qu'on veut.

6. La continuité dans un intervalle est étroitement liée à la convergence des suites, en vertu de la proposition suivante, qui permet dans beaucoup de cas de décider de cette continuité :

THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (x_0, X) il faut et il suffit que, pour toute suite convergente de nombres*

$$(1) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

compris entre a et b, la suite

$$(2) \qquad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

soit elle-même convergente.

La condition est nécessaire. En effet, la suite (1) étant convergente, on peut prendre n assez grand pour que x_{n+p} et x_n diffèrent aussi peu qu'on voudra :

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

D'autre part, si la suite (2) n'était pas convergente, les différences mutuelles de ses termes finiraient par rester supérieures à un nombre assignable h et l'indice n pourrait être supposé tel qu'on eût

$$|f(x_{n+p}) - f(x_n)| > h.$$

Cette inégalité et la précédente sont en contradiction avec l'hypothèse de la continuité. Donc la suite (2) est convergente, si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (x_0, X).

Supposons maintenant que, quelle que soit la suite convergente (1), la suite (2) soit convergente. Je dis que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle considéré. En effet, si elle n'était pas continue, on pourrait déterminer entre x_0 et X une suite d'intervalles tendant vers zéro

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_n, b_n), \quad \ldots,$$

dont chacun serait compris dans le précédent et contiendrait au moins un couple de valeurs

$$(x_1, x'_1), \quad (x_2, x'_2), \quad \ldots, \quad (x_n, x'_n), \quad \ldots.$$

telles que les différences

$$f(x_1)-f(x'_1),\quad f(x_2)-f(x'_2),\quad \ldots,\quad f(x_n)-f(x'_n),\quad \ldots$$

fussent *toutes* supérieures à un nombre déterminé h (calculable si l'on connaissait la loi de formation de la fonction f). Ainsi la suite

$$(3)\qquad f(x_1),\quad f(x'_1),\quad f(x_2),\quad f(x'_2),\quad \ldots,\quad f(x_n),\quad f(x'_n),\quad \ldots$$

ne serait pas convergente. Nous arriverons donc à une contradiction si nous prouvons la convergence de la suite

$$x_1,\quad x'_1,\quad x_2,\quad x'_2,\quad \ldots.$$

Or la suite $a_1, a_2, \ldots$ et la suite $b_1, b_2, \ldots$ sont convergentes. Car les termes de la première ne sont pas décroissants et sont tous plus petits que X; ceux de la seconde ne sont pas croissants et sont tous plus grands que x_0. De plus, ces deux suites sont équivalentes, puisque $b_n - a_n$ tend vers zéro. De là résulte manifestement la convergence de la suite

$$a_1,\quad b_1,\quad a_2,\quad b_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad b_n,\quad \ldots,$$

et aussi celle de la suite

$$x_1,\quad x'_1,\quad x_2,\quad x'_2,\quad \ldots,\quad x_n,\quad x'_n,\quad \ldots,$$

dont les termes s'intercalent par couples entre a_1 et b_1, a_2 et $b_2, \ldots, a_n$ et $b_n, \ldots$.

En conséquence, l'hypothèse de la non-continuité de $f(x)$ est inacceptable.

Remarque. — Si la fonction $f(x)$ est pour toute valeur de x un nombre bien déterminé, il n'y a aucune difficulté à concevoir et à former la suite (3). Mais si à chaque valeur de x répond une suite convergente dont $f(x)$ est un terme, il faudra, pour former la suite (3), prendre dans chacune des suites qui correspondent respectivement à $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ des termes de plus en plus éloignés à mesure que grandit l'indice n. C'est ce que nous avons expliqué en détail à la fin de la théorie des suites convergentes (Chap. I, n° 15).

III. — Fonctions continues pour une valeur de la variable.

7. Il y a lieu de considérer aussi une autre sorte de continuité des fonctions. On dit que la fonction $f(x)$ est *continue pour la valeur* x, si l'on peut calculer un nombre positif α tel que, pour tout nombre h moindre que α en valeur absolue, on ait

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

ε étant une fraction aussi petite qu'on veut.

D'après cette définition, toute fonction continue *dans* un intervalle est continue *pour* tout nombre x appartenant à l'intervalle. Mais la réciproque n'est pas vraie. Nous avons en effet prouvé que toute fonction continue *dans* un intervalle reste *finie* dans cet intervalle. Or *une fonction peut être continue pour tout nombre x appartenant à un intervalle sans rester finie dans cet intervalle.*

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour la fonction

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2},$$

relativement à l'intervalle qui a pour limites $1,4$ et $1,5$. Elle est continue *pour* toute valeur x appartenant à cet intervalle. On a, en effet,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h(2x+h)}{(x^2-2)[(x+h)^2-2]};$$

d'où l'on conclut

$$|f(x+h)-f(x)|<\left|\frac{4h}{(x^2-2)[(x+h)^2-2]}\right|.$$

Or x et $x+h$ étant compris entre $1,4$ et $1,5$, le module de la quantité qui figure au dénominateur du second membre est supérieur à

$$[(1,4)^2-2]^2=0,0016.$$

De là résulte immédiatement

$$|f(x+h)-f(x)|<2500\,|h|.$$

ce qui prouve notre assertion. D'autre part, la fonction $f(x)$ devient dans l'intervalle considéré supérieure à tout nombre N, si

grand qu'il soit. Car l'inégalité

$$\frac{1}{x^2 - 2} > N$$

revient à la suivante

$$x^2 < \frac{N(2N+1)}{N^2},$$

à laquelle on satisfait par toute valeur de x comprise entre $1,4$ et $R : N$, en désignant par R la racine carrée *entière* de $N(2N+1)$.

Ainsi la continuité *dans* un intervalle est une condition beaucoup plus restrictive que la continuité *pour* chaque valeur x comprise dans l'intervalle. Nous ne désignerons désormais, sauf avis contraire, sous le nom de fonctions *continues* que des fonctions *continues dans un intervalle.*

IV. — Formation de fonctions continues.

8. De la définition que nous avons donnée des fonctions on déduit aisément que *si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions définies dans un intervalle (x_0, X), leur somme $f + \varphi$, leur produit $f\varphi$ et leur quotient $f : \varphi$ sont des fonctions de x dans le même intervalle.*

Pour la somme et le produit, la proposition est vraie sans restriction; quant à la fonction $f : \varphi$, elle cessera d'être définie si la fonction $\varphi(x)$ *admet une racine* dans l'intervalle considéré. On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ *admet une racine* dans un intervalle (x_0, X), s'il existe, dans l'intervalle, soit un nombre ξ tel que la suite convergente qui définit $f(\xi)$ ait pour limite zéro, soit une suite convergente *irrationnelle* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ telle que les valeurs correspondantes $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n), \ldots$ forment elles-mêmes une suite convergente ayant pour limite zéro.

Supposons maintenant que les deux fonctions f et φ soient *continues dans l'intervalle* (x_0, X); les combinaisons $f + \varphi$ et $f\varphi$ jouiront de la même propriété, ainsi qu'on le voit sans peine. Quant à la fonction $f : \varphi$, elle sera continue aussi, sous la restriction énoncée plus haut. Si cette condition n'est pas remplie, elle pourra, soit perdre toute signification comme la fonction $1 : x$ pour $x = 0$, soit rester, comme la fonction $1 : (x^2 - 2)$,

continue pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle, tout en n'étant pas *continue* dans cet intervalle. Dans un cas comme dans l'autre, on dit qu'elle éprouve une *discontinuité*, en devenant *infinie*.

L'exemple le plus simple de fonction continue dans un intervalle est fourni par les puissances entières et positives de la variable : la fonction x^m est même *continue dans tout intervalle*. Avec les diverses puissances de la variable, multipliées par des coefficients constants (nombres indépendants de la valeur x) et ajoutées les unes aux autres, on forme de nouvelles fonctions continues : ce sont les *polynomes entiers*. Les quotients de deux polynomes entiers, ou *fractions rationnelles*, sont aussi, sous les réserves faites, des fonctions continues.

V. — Fonctions à oscillation totale limitée.

9. *Définitions.* — Une fonction $f(x)$ étant finie dans un intervalle (x_0, X), on divise cet intervalle en n autres et l'on fait la somme des oscillations $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ de la fonction dans ces intervalles. Si cette somme reste inférieure à un nombre déterminé A, quel que soit le nombre des intervalles formés, quelle que soit leur petitesse, quelle que soit la loi de subdivision, nous dirons que $f(x)$ est une *fonction à oscillation totale limitée*. En vertu de cette définition, l'oscillation moyenne est nulle. On peut, en effet, pour l'évaluer, supposer tous les intervalles égaux ; on trouve ainsi

$$\Omega_n = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n}{n} < \frac{A}{n},$$

valeur qui devient nulle quand n grandit indéfiniment.

Une fonction $f(x)$ est *constante dans l'intervalle* (x_0, X) si, quels que soient les deux nombres x et x' appartenant à l'intervalle, les deux suites qui définissent $f(x)$ et $f(x')$ sont équivalentes. Son oscillation moyenne est évidemment nulle.

Une fonction $f(x)$ est *croissante dans l'intervalle* (x_0, X) si, x et x' étant deux nombres quelconques de l'intervalle, le second plus grand que le premier, les termes de la suite convergente qui définit $f(x')$ sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à ceux

de la suite qui définit $f(x)$. Si c'est le contraire qui a lieu, la fonction est *décroissante dans l'intervalle* (x_0, X). Pour de telles fonctions, l'oscillation totale $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$ est, au signe près, égale à $f(X) - f(x_0)$; en conséquence, leur oscillation moyenne est nulle.

Une fonction est *croissante pour la valeur* x, s'il est possible de déterminer un nombre positif α tel que, sous la seule condition $|h| < \alpha$, la différence

$$f(x+h) - f(x)$$

ait le signe de h. C'est ce qu'exprime l'inégalité

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les termes, pris à partir d'un certain rang, des deux suites qui définissent $f(x+h)$ et $f(x)$.

Une fonction *croissante dans un intervalle* (x_0, X) est évidemment *croissante pour tout nombre* x compris entre x_0 et X. Mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi la fonction

$$\frac{1}{1-x^2}$$

est *croissante pour* toute valeur positive x; mais, tandis qu'elle est positive pour x compris entre zéro et 1, elle a le signe *moins* quand x est supérieur à 1, de sorte qu'elle n'est pas *croissante dans* l'intervalle (0, 2) par exemple.

Si l'on rapproche ces définitions de celle des fonctions continues dans un intervalle, on voit qu'une fonction peut être continue dans un intervalle et n'avoir pas son oscillation totale limitée, ce qui entraîne qu'elle ne soit ni croissante, ni décroissante dans cet intervalle, Pareillement, une fonction peut avoir son oscillation totale limitée dans un intervalle sans être continue dans cet intervalle, ainsi que nous allons le voir.

10. *Discontinuités; saut brusque.* — Si une fonction n'est pas continue dans un intervalle (x_0, X), on dit qu'elle est *discontinue* ou qu'elle présente des *discontinuités* dans cet intervalle. On exprime par là que, l'intervalle (x_0, X) étant subdivisé en

d'autres, aussi nombreux et aussi petits qu'on voudra, il y aura toujours certains de ces intervalles dans lesquels l'oscillation de la fonction sera supérieure à un nombre déterminé : ce sont là ce qu'on appelle les *intervalles de discontinuité*. Il va sans dire que toute fonction finie est nécessairement continue dans tout intervalle qui n'est pas un intervalle de discontinuité.

Pour définir la discontinuité particulière qui est appelée *saut brusque*, considérons une suite convergente

$$(4) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

de nombres *croissants* et la suite

$$(5) \qquad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

des valeurs correspondantes (Chap. II, n° 3) de la fonction $f(x)$, suite qui sera supposée convergente. On suppose de plus qu'à *toute* suite croissante

$$(6) \qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \ldots,$$

équivalente à la suite (4), corresponde une suite

$$(7) \qquad f(\xi_1), \quad f(\xi_2), \quad \ldots, \quad f(\xi_n), \quad \ldots$$

qui soit équivalente à la suite (5).

Considérons, d'autre part, une suite

$$(8) \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots$$

de nombres *décroissants*, équivalente à la suite (4), et supposons que la suite correspondante

$$(9) \qquad f(x'_1), \quad f(x'_2), \quad \ldots, \quad f(x'_n), \quad \ldots$$

soit convergente. Supposons encore qu'à *toute* suite décroissante

$$(10) \qquad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_n, \quad \ldots,$$

équivalente à la suite (8), corresponde une suite

$$(11) \qquad f(\xi'_1), \quad f(\xi'_2), \quad \ldots, \quad f(\xi'_n), \quad \ldots$$

qui soit équivalente à la suite (9).

Cela étant, nous distinguerons deux cas, selon que les suites (4) et (8) sont irrationnelles ou rationnelles (Chap. I, n° 6).

1° Les suites (4) et (8) étant irrationnelles, si les deux suites convergentes :

$$(5) \qquad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots,$$
$$(9) \qquad f(x'_1), \quad f(x'_2), \quad \ldots, \quad f(x'_n), \quad \ldots$$

ne sont pas équivalentes, on dit que la fonction $f(x)$ fait un *saut brusque* dans l'intervalle (x_m, x'_r) qui a pour limites l'un des termes x_m de la suite (4) et l'un des termes x'_r de la suite (8); l'*amplitude* du saut brusque est l'une quelconque des valeurs de la différence

$$f(x'_n) - f(x_n),$$

l'indice n étant tel que $f(x'_{n+p})$ et $f(x_{n+p})$ diffèrent respectivement aussi peu qu'on voudra de $f(x'_n)$ et de $f(x_n)$, quel que soit l'entier positif p.

2° Les suites (4) et (8) étant rationnelles, c'est-à-dire ayant une limite x, on comparera les suites correspondantes (5) et (9) soit avec la valeur $f(x)$ que la fonction prend pour cette valeur limite x, si elle est définie par des nombres (Chap. II, n° 3, *Remarque I*), soit avec l'une des suites convergentes et équivalentes

$$(12) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

que l'on fait correspondre, dans le cas général, au nombre considéré x, pour définir $f(x)$.

Si *une seule* des suites (5) et (9) est équivalente à la suite (12), la fonction fera *pour la valeur* x un *saut brusque* en tout pareil à ceux dont il vient d'être question; l'*amplitude* de ce saut brusque sera représentée par l'une des différences

$$f(x'_n) - f(x), \quad f(x) - f(x_n),$$

selon que la suite (12) sera équivalente à la suite croissante (4) ou à la suite décroissante (8).

Si *aucune* des suites (5) et (9) n'est équivalente à la suite (12), la fonction fait, *pour la valeur* x, deux *sauts brusques,* le premier *avant*, d'amplitude

$$f(x) - f(x_n),$$

le second *après*, d'amplitude

$$f(x'_n) - f(x).$$

Dans le cas présent, il peut arriver que les deux suites (5) et (9) soient *équivalentes* entre elles : il y aura toujours double saut brusque, si elles ne sont pas *équivalentes* à la suite (12).

Exemples. — Voici un premier exemple de saut brusque. Anticipant sur les propriétés de la fonction exponentielle, qui sera étudiée au Chapitre suivant, considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x^2-2}}} \qquad (a > 1),$$

et soit x_n la racine carrée arithmétique de 2 *par défaut* à 10^{-n} près; les nombres

$$(4) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

forment une suite *croissante*, qui est convergente et irrationnelle (Chap. I, nos 5 et 6); les nombres correspondants

$$(5) \qquad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

forment une suite convergente qui a pour limite l'*unité*. A toute suite (6) équivalente à la suite (4) correspond une suite (7) qui a aussi pour limite l'unité.

D'autre part, soit x'_n la racine carrée arithmétique de 2 *par excès* à 10^{-n} près; les nombres

$$(8) \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n,$$

forment une suite *décroissante* et équivalente à la suite (4); les valeurs correspondantes de la fonction

$$(9) \qquad f(x'_1), \quad f(x'_2), \quad \ldots, \quad f(x'_n), \quad \ldots$$

forment, une suite convergente qui a pour limite *zéro*. A toute suite (10), équivalente à la suite (8), correspond une suite (11) qui a aussi pour limite zéro.

En conséquence, la fonction $f(x)$ fait un saut brusque d'amplitude égale à -1, dans un intervalle qu'on peut resserrer à volonté, en lui donnant successivement pour limites les nombres 1 et 2, les nombres 1,4 et 1,5, les nombres 1,41 et 1,42, ... Ainsi

il est prouvé qu'une fonction peut faire un saut brusque dans un intervalle, bien qu'elle soit continue *pour* tout nombre appartenant à cet intervalle.

Voici un autre exemple de saut brusque; il est fourni par la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} \qquad (a > 1),$$

à laquelle nous assignerons la valeur 1 pour $x = 0$. Quand x tend vers zéro par valeurs croissantes, $\varphi(x)$ tend vers l'unité. Quand x tend vers zéro par valeurs décroissantes, $\varphi(x)$ tend vers zéro.

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ fait un saut brusque d'amplitude égale à -1 pour la valeur $x = 0$.

11. Théorème. — *Une fonction, qui a son oscillation totale limitée dans un intervalle* (x_0, X), *ne présente dans cet intervalle d'autres discontinuités que des sauts brusques; et, si l'on divise l'intervalle* (x_0, X) *d'une façon quelconque, en intervalles partiels aussi nombreux et aussi petits qu'on voudra, le nombre des intervalles partiels dans lesquels la fonction fait un saut brusque d'amplitude supérieure en valeur absolue à un nombre fixe* l, *est fini.*

Considérons, en effet, dans l'intervalle (x_0, X), une suite convergente

$$(4) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

croissante, mais d'ailleurs quelconque, et soient

$$(5) \qquad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

les valeurs correspondantes de la fonction. L'oscillation totale dans l'intervalle (x_1, x_n) est au moins égale à

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \ldots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)|.$$

Mais, par hypothèse, elle est limitée. Donc la série précédente, composée de termes positifs, est convergente. On en conclut (Chap. I, n° 13) que la suite (5) est convergente.

A toute suite croissante

$$(6) \qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \ldots,$$

équivalente à la suite (4), correspond une suite,

$$(7) \qquad f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_n),\ \ldots,$$

qui est nécessairement équivalente à la suite (5); sans quoi, avec les deux suites de nombres x_n et ξ_n, on composerait une seule suite croissante à laquelle correspondraient des valeurs de f qui ne formeraient pas une suite convergente, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

On verra de même qu'à toute suite convergente

$$(8) \qquad x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots$$

décroissante, mais d'ailleurs quelconque, correspondent pour la fonction des valeurs

$$(9) \qquad f(x'_1),\ f(x'_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

qui forment une suite convergente et qu'à toute suite

$$(10) \qquad \xi'_1,\ \xi'_2,\ \ldots,\ \xi'_n,\ \ldots,$$

équivalente à la suite (8), correspond une suite

$$(11) \qquad f(\xi'_1),\ f(\xi'_2),\ f(\xi'_n),\ \ldots$$

qui est nécessairement équivalente à la suite (9).

Dès lors, la fonction $f(x)$ ne peut présenter de discontinuité, dans l'intervalle (x_0, X), que dans l'un des deux cas suivants :

1° A deux suites irrationnelles (4) et (8) correspondent deux suites (5) et (9) non équivalentes entre elles;

2° A deux suites rationnelles (4) et (8), ayant pour limite x, correspondent deux suites (5) et (9) dont une au moins n'est pas équivalente à celle qui définit $f(x)$.

Dans un cas comme dans l'autre, la discontinuité considérée est un saut brusque, ce qui prouve la première partie de l'énoncé.

La seconde est évidente : le nombre n des intervalles dans lesquels la fonction fait un saut brusque d'amplitude supérieure en valeur absolue au nombre l est nécessairement fini, sans quoi l'oscillation totale dans l'intervalle (x_0, X), qui est supérieure à nl, ne serait pas limitée.

VI. — Fonctions continues à oscillation totale limitée ou fonctions rectifiables.

12. Nous allons étudier les fonctions remarquables qui jouissent de la double propriété d'avoir leur oscillation totale limitée dans un intervalle et d'être continues dans cet intervalle.

THÉORÈME. — *Une fonction $f(x)$ étant continue et à oscillation totale limitée dans un intervalle (x_0, X), si l'on subdivise cet intervalle en d'autres, suffisamment nombreux et suffisamment petits, les sommes des oscillations correspondantes diffèrent entre elles d'aussi peu que l'on veut, quel que soit le mode de division adopté.*

Remarquons tout d'abord que si, après avoir divisé l'intervalle (x_0, X) d'une certaine manière, on pousse le fractionnement de plus en plus loin, en subdivisant toujours les intervalles précédemment créés, la somme σ_n des oscillations $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ de la fonction dans les divers intervalles ne peut que croître avec n ou tout au moins rester constante. C'est ce dont il est facile de s'assurer. Il suit de là que les sommes

$$\sigma_n, \quad \sigma_{n_1}, \quad \sigma_{n_2}, \quad \ldots, \quad \sigma_N, \quad \ldots,$$

qui correspondent à des fractionnements successifs, forment une suite convergente, puisque par hypothèse aucune d'elles ne surpasse un certain nombre A.

Considérons maintenant les sommes

$$\sigma'_{n'}, \quad \sigma'_{n'_1}, \quad \sigma'_{n'_2}, \quad \ldots, \quad \sigma'_{N'}, \quad \ldots,$$

relatives à des fractionnements successifs dans un autre mode de division de l'intervalle (x_0, X). Ces sommes forment aussi une suite convergente, et l'on peut, se donnant arbitrairement une fraction positive ε, choisir n et n' assez grands pour que les nombres σ_n et $\sigma'_{n'}$ aient, avec tous les termes qui viennent après eux dans leurs suites respectives, des différences moindres que toute fraction $\eta < \varepsilon$.

Cela posé, prenons l'indice N assez grand pour que le plus

grand des intervalles qui servent à former la somme σ_N soit plus petit que le plus petit des intervalles relatifs à $\sigma'_{n'}$, et comparons $\sigma'_{n'}$ avec σ_N. Certains intervalles de σ_N peuvent empiéter sur deux intervalles consécutifs de $\sigma'_{n'}$; leur nombre est au plus égal à n'. Séparons chacun d'eux en deux autres, dont l'extrémité commune soit précisément celle des deux intervalles de $\sigma'_{n'}$ sur lesquels il empiète. Soit ω l'oscillation dans l'intervalle considéré avant son fractionnement; l'oscillation dans chacun des deux intervalles nouveaux est au plus égale à ω. L'effet du partage de l'intervalle primitif a donc été d'augmenter σ_n au plus de ω, donc de moins de α, si α désigne la plus grande oscillation dans les divers intervalles de σ_N. Au total, σ_N a augmenté au plus de $n'\alpha$, et les nouveaux intervalles sont tous compris dans ceux de $\sigma'_{n'}$. D'où l'inégalité

$$\sigma'_{n'} < \sigma_N + n'\alpha.$$

D'autre part, on a

$$\sigma_N < \sigma_n + \eta,$$

en sorte qu'il vient

$$\sigma'_{n'} - \sigma_n < \eta + n'\alpha.$$

Or n et n' sont fixes, tandis que N est aussi grand qu'on veut; comme $f(x)$ est continue, l'oscillation désignée par α tend vers zéro à mesure que N augmente. On peut donc rendre $\eta + n'\alpha$ plus petit que ε; d'où

$$\sigma'_{n'} - \sigma_n < \varepsilon.$$

Si maintenant on désigne par N′ un indice assez grand pour que le plus grand des intervalles qui servent à former $\sigma'_{N'}$ soit plus petit que le plus petit des intervalles relatifs à σ_n, en comparant σ_n avec $\sigma'_{N'}$, on prouvera qu'il est possible de satisfaire à l'inégalité

$$\sigma_n - \sigma'_{n'} < \varepsilon.$$

On a donc bien

$$|\sigma_n - \sigma'_{n'}| < \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème. On voit que l'oscillation totale des fonctions considérées n'est pas seulement *limitée*, mais qu'elle est *déterminée*, puisque les sommes σ_n diffèrent aussi peu qu'on veut les unes des autres, quand n est suffisamment grand et l'amplitude de chaque intervalle suffisamment petite. L'un quelconque

de ces nombres σ_n pourra donc être appelé *l'oscillation totale* de la fonction dans l'intervalle (x_0, X).

13. *Fonctions rectifiables.* — Étant donnée une fonction

$$y = f(x),$$

continue dans l'intervalle (x_0, X), on divise cet intervalle en n autres, au moyen des nombres croissants $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et l'on forme la somme

$$P_n = \sum_{r=0}^{r=n-1} c_r, \qquad c_r = \sqrt{(x_{r+1} - x_r)^2 + (y_{r+1} - y_r)^2}.$$

On dit que la fonction $f(x)$ est *rectifiable* dans l'intervalle (x_0, X) si, lorsqu'on multiplie le nombre des intervalles et qu'on diminue indéfiniment leur amplitude, toutes les sommes P_n finissent par différer aussi peu qu'on veut les unes des autres, quelle que soit la loi de fractionnement. Avant de chercher à quelles conditions une fonction est rectifiable, nous établirons une proposition, qui est fondamentale dans la théorie des fonctions rectifiables.

Théorème. — *Si pour un mode déterminé de subdivision de l'intervalle (x_0, X), mode dans lequel on conserve toujours les extrémités des intervalles déjà employés, la somme P_n ne croît pas indéfiniment, il en est de même pour tout autre mode de subdivision; les deux sommes obtenues dans deux modes de subdivision quelconques finissent par différer aussi peu qu'on veut.*

En effet, dans le mode de subdivision donné, il est manifeste que les sommes

$$(13) \qquad P_n, \ \ldots, \ P_\nu, \ \ldots$$

vont toujours en croissant, ou du moins ne décroissent jamais, et comme, par hypothèse, elles ne croissent pas indéfiniment, elles forment une suite convergente.

Envisageons maintenant un autre mode de subdivision donnant lieu à la suite

$$(14) \qquad P'_{n'}, \ \ldots, \ P'_\nu, \ \ldots.$$

Il faut démontrer que l'une quelconque de ces dernières sommes, $P'_{n'}$ par exemple, ne dépasse pas un nombre qu'on peut calculer. Considérons dans la suite (13) un indice ν assez grand pour que le plus grand, e, des intervalles qui entrent dans la composition de la somme P_ν soit inférieur au plus petit, e', des intervalles relatifs à la somme $P'_{n'}$. Rappelons-nous que n' est un indice fixe dans tout le raisonnement qui va suivre. Du choix de ν résulte que tous les intervalles de P_ν, ou bien sont compris dans ceux de $P'_{n'}$, ou bien chevauchent sur deux seulement de ces derniers. Ceux qui sont dans ce cas sont au plus au nombre de n'. Considérons l'un quelconque d'entre eux et appelons-le (ξ, ξ'). Les deux nombres ξ, ξ' comprennent entre eux un et un seul nombre x'_r ayant servi à former la somme $P'_{n'}$. A l'intervalle (ξ, ξ') correspond dans la somme P_ν le terme

$$\gamma = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$$

et il est facile de voir que γ est plus petit que

$$\delta = \sqrt{(x'_r - \xi)^2 + (y'_r - \eta)^2} + \sqrt{(\xi' - x'_r)^2 + (\eta' - y'_r)^2}.$$

(L'inégalité $\gamma < \delta$ est celle qui exprime qu'un côté d'un triangle est moindre que la somme des deux autres.)

Formons une somme auxiliaire Π où sont conservés les termes de P_ν correspondant à des intervalles non empiétants et où les termes γ relatifs à des intervalles empiétants sont remplacés par les δ correspondants. Si nous comparons $P'_{n'}$ à Π, nous voyons que les intervalles de Π sont tous contenus dans les intervalles de $P'_{n'}$. Par conséquent

$$P'_{n'} < \Pi.$$

Or, à son tour, Π surpasse P_ν de moins de $\Sigma\delta$, les termes de cette dernière somme étant au plus au nombre de n'. Nous avons dit que l'intervalle $\xi' - \xi$ était au plus égal à e. L'oscillation de la fonction dans cet intervalle est plus petite qu'un nombre ω, aussi petit qu'on veut, lorsque l'intervalle est suffisamment petit et l'on a

$$\delta < |x'_r - \xi| + |y'_r - \eta| + |\xi' - x'_r| + |\eta' - y'_r|,$$

c'est-à-dire

$$\delta < |\xi' - \xi| + 2\omega < e + 2\omega.$$

En conséquence, il vient

$$\Pi < P_\nu + n'(e + 2\omega)$$

et finalement

$$P'_{n'} < P_\nu + n'(e + 2\omega).$$

Or, la suite (13) étant convergente, le terme P_n diffère de tous les termes P_ν qui le suivent de moins d'une fraction ε, connue dès que l'on connaît n. On peut donc écrire

$$P'_{n'} < P_n + \varepsilon + n'(e + 2\omega).$$

Or n' est fixe (ainsi que n), tandis que nous pouvons prendre ν aussi grand que nous voulons et, par suite, e et ω plus petits que toute fraction donnée. Si donc nous appelons ε' un nombre tant soit peu supérieur à ε, nous avons

$$P'_{n'} < P_n + \varepsilon'.$$

De là on conclut que $P'_{n'}$ est inférieur à un nombre qu'on peut assigner et que, en conséquence, la suite (14) est convergente. D'autre part, $P'_{n'}$ diffère de tous les termes qui viennent après lui dans sa suite de moins de ε_1; et si nous appelons ε'_1 un nombre tant soit peu supérieur à ε_1, nous avons, pour les mêmes raisons que tout à l'heure,

$$P_n < P'_{n'} + \varepsilon'_1.$$

Finalement, si ε'_0 est le plus grand des nombres ε' et ε'_1, on a

$$|P_n - P'_{n'}| < \varepsilon'_0.$$

Ceci prouve la proposition énoncée et en même temps conduit à un résultat numérique bien net.

14. Théorème. — *Pour qu'une fonction continue soit rectifiable dans un intervalle, il faut et il suffit que son oscillation totale dans l'intervalle considéré soit limitée.*

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. On a visiblement

$$P_n > \Sigma |y_{r+1} - y_r|.$$

Or, P_n est inférieur à un certain nombre A; on a donc *a fortiori*

$$\sigma_n = \Sigma |y_{r+1} - y_r| < A.$$

Je dis qu'en vertu de cette inégalité l'oscillation totale est limitée. En effet, dans l'intervalle (x_r, x_{r+1}), on peut trouver deux nombres ξ_r, ξ'_r, auxquels correspondent, pour la fonction *continue* $y = f(x)$, deux valeurs, dont l'une, η_r, diffère de moins de $\varepsilon : 2$ de la limite supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle considéré, et dont l'autre, η'_r, diffère de moins de $\varepsilon : 2$ de la limite inférieure. Par suite, $|\eta_r - \eta'_r|$ diffère de moins de ε de l'oscillation ω_r de $f(x)$ dans ce même intervalle, et l'on peut écrire

$$|\eta_r - \eta'_r| = \omega_r - \theta_r \varepsilon \qquad (-1 < \theta_r < 1)$$

Ainsi la somme des oscillations ω_r est représentée par

$$\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{n-1} = |\eta_0 - \eta'_0| + |\eta_1 - \eta'_1| + \ldots + \varepsilon \Sigma \theta_r.$$

Le coefficient de ε est au plus égal à n, et n étant fixé, on peut, d'après la définition du nombre ε, prendre ce nombre assez petit pour que $n\varepsilon$ soit aussi petit qu'on veut. Pour établir que l'oscillation totale de $f(x)$ est limitée, il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de la somme

$$|\eta_0 - \eta'_0| + |\eta_1 - \eta'_1| + \ldots.$$

Or celle-ci est évidemment une somme σ_n, diminuée par la suppression de ses termes de rang impair. La condition énoncée est donc nécessaire.

Je dis qu'elle est suffisante, c'est-à-dire que, si la fonction $f(x)$ a son oscillation totale limitée, elle est rectifiable. En effet, on a

$$P_n < \Sigma |x_{r+1} - x_r| + \Sigma |y_{r+1} - y_r|,$$

et, à plus forte raison (n° **11**),

$$P_n < |X - x_0| + \Sigma \omega_r.$$

Or, $\Sigma \omega_r$ étant inférieur à un certain nombre A, la somme P_n est inférieure à un nombre déterminé.

CHAPITRE IV.

PROBLÈME INVERSE DU CALCUL DES FONCTIONS. FONCTIONS INVERSES; EXPONENTIELLE ET LOGARITHME.

Nous traitons dans ce Chapitre le second grand problème de la théorie des fonctions, qui conduit à la notion de *fonctions inverses,* et nous exposons la théorie des deux fonctions inverses (exponentielle et logarithme) qui sont à la fois les plus simples et les plus importantes de toutes celles qui interviennent dans l'Analyse.

I. — Position du problème.

1. Il ne suffit pas, pour connaître pleinement une fonction, de savoir calculer $f(x)$ quand x est donné. Il faut aussi étudier le problème inverse :

Existe-t-il, dans un certain intervalle, des nombres x qui fassent acquérir à la fonction une valeur donnée?

En d'autres termes :

Étant donné un nombre A, *existe-t-il des nombres x tels que la suite convergente $f(x)$ qui correspond à chacun d'eux ait* A *pour limite?*

La question étant ainsi posée, la réponse sera presque toujours négative. Nous modifierons l'énoncé de la manière suivante :

Trouver une suite convergente

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

telle que les nombres

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

forment une suite convergente ayant pour limite A.

Le seul cas intéressant est celui où, *pour toute suite* $x'_1, x'_2, \ldots$, *équivalente à la première, les nombres* $f(x'_1), f(x'_2), \ldots$ *tendent aussi vers* A. C'est ce qui arrivera notamment pour les fonctions continues (*voir* ci-après n° 2), si toutefois il existe une première suite répondant à la question. Quand nous aurons résolu le nouveau problème (et nous ne le ferons ici complètement que pour les fonctions à la fois continues et croissantes), nous dirons que nous connaissons *une racine* x de l'équation

$$f(x) = \mathrm{A}.$$

Cette racine x sera *l'un quelconque* des termes de la suite x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ou de toute autre suite équivalente, pris à partir d'un rang suffisamment élevé.

II. — Existence des racines.

2. Théorème. — *Si une fonction* $f(x)$ *est continue dans l'intervalle* (a, b) *et si* A *désigne un nombre quelconque, compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *l'équation*

$$f(x) = \mathrm{A}$$

admet au moins une racine dans l'intervalle (a, b).

Partageons l'intervalle (a, b) en deux autres égaux (a, c), (c, b). Si la suite $f(c)$ tend vers A, c est racine. Sinon, des trois nombres a, c, b, deux au moins, que nous appellerons a_1, b_1, sont tels qu'on a

$$f(a_1) < \mathrm{A} < f(b_1).$$

Divisons l'intervalle (a_1, b_1) en deux autres égaux (a_1, c_1), (c_1, b_1) et appelons (a_2, b_2) l'un d'eux, tel que A soit intermédiaire entre $f(a_2)$ et $f(b_2)$; nous le diviserons encore en deux parties égales. Continuant ainsi, ou nous rencontrerons un nombre b_i tel que la suite $f(b_i)$ ait pour limite A, ce qui prouve le théorème, ou nous déterminons une série d'intervalles dont chacun est compris dans le précédent et égal à sa moitié et qui, par suite, tendent vers zéro. La suite $a_1, a_2, \ldots$, composée de nombres non décroissants et tous moindres que b, est convergente. La suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ est équivalente à la suite a_1,

$a_2, \ldots, a_n, \ldots$, parce que la différence

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

a pour limite zéro.

Soient maintenant des nombres

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

pris *arbitrairement,* le premier entre a_1 et b_1, le second entre a_2 et b_2, ...; ils forment une suite qui répond à la question. Elle est convergente, en effet, puisque ses termes x_n sont compris entre les termes de même rang, a_n et b_n, de deux suites équivalentes. De plus, les nombres

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

tendent vers A, à cause de la continuité de $f(x)$. En effet, quand la différence $b_n - a_n$, qui tend vers zéro, est suffisamment petite, $f(x_n)$ diffère aussi peu qu'on veut de $f(a_n)$ et de $f(b_n)$, et conséquemment de A, intermédiaire entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$.

Prouvons maintenant que la suite (1) peut être remplacée par toute suite équivalente

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire que la suite $f(x'_1)$, $f(x'_2)$, ..., $f(x'_n)$, ... converge aussi vers A. S'il n'en était pas ainsi, en effet, la différence

$$|f(x'_n) - f(x_n)|$$

serait, à partir d'une certaine valeur de n, supérieure à un nombre ε que l'on pourrait calculer; mais, comme $f(x)$ est continue, il en résulterait que la différence $x'_n - x_n$ serait supérieure à un certain nombre qu'on pourrait déterminer; c'est-à-dire que les deux suites x_n et x'_n ne seraient pas équivalentes.

Remarque. — Le second grand problème que nous nous sommes posé à propos des fonctions est loin d'être complètement résolu par ce qui précède, même pour les fonctions continues. Car, parmi toutes les suites *distinctes* (c'est-à-dire non équivalentes), qui font acquérir à la fonction une valeur donnée, notre méthode ne nous en a donné qu'*une,* et son application répétée à

des modes de subdivision variés de l'intervalle (a, b) ne fera pas connaître avec certitude *toutes* les suites qui répondent à la question. Il y a cependant un cas très particulier où cette méthode fournit la solution *complète* du problème : c'est celui où la fonction continue $f(x)$ est en même temps croissante (ou décroissante) dans l'intervalle (a, b), ou, ce qui revient au même, le cas où l'intervalle (a, b) peut être divisé en un certain nombre d'autres dans chacun desquels la fonction jouit de cette propriété.

3. Théorème. — *Si une fonction $f(x)$ est continue et croissante (ou décroissante) dans l'intervalle (a, b), et si A désigne un nombre quelconque, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation*

$$f(x) = \mathrm{A}$$

admet une racine, et une seule, comprise entre a et b.

Nous venons de voir qu'il en existe toujours une, définie par la suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, équivalente d'après sa formation même aux deux suites a_n et b_n.

Supposons qu'il existe dans l'intervalle (a, b) une suite

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots,$$

non équivalente à celle-là et telle que les nombres

$$f(x'_1), \quad f(x'_2), \quad \ldots, \quad f(x'_n) \quad \ldots,$$

tendent vers A. Ses termes sont tous, à partir d'un certain rang, supérieurs (ou inférieurs) à ceux de la première (Chap. I, n° 9), et, par conséquent, à ceux de la suite équivalente $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Comme $f(x)$ est supposée croissante dans tout l'intervalle (a, b), on a

$$f(a_1) < f(a_2) < \ldots < f(a_n) < \ldots < \mathrm{A},$$
$$f(b_1) > f(b_2) > \ldots > f(b_n) > \ldots > \mathrm{A}.$$

D'après cela, il est impossible que la suite $f(x'_1), f(x'_2), \ldots$ présente *indéfiniment* des termes inférieurs à sa limite A. Car, x'_n étant l'un d'eux, on aurait

$$f(b_n) > \mathrm{A} > f(x'_n),$$

ce qui n'est pas, puisque b_n est moindre que x'_n et que $f(x)$ est croissante.

Il faut donc que la suite considérée ait *tous* ses termes plus grands que A, à partir d'un certain rang n. Comme ils tendent vers A, on peut choisir p tel que la différence $f(x'_{n+p}) - A$ soit moindre que la différence $f(b_n) - A$. On aurait donc

$$f(x'_{n+p}) < f(b_n),$$

ce qui est impossible, b_n étant inférieur à x'_{n+p}.

4. Nous rapprocherons du théorème précédent une propriété fondamentale des polynomes entiers

THÉORÈME. — *Un polynome entier de degré m n'admet pas plus de m racines.*

Considérons le polynome

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Je dis qu'il n'existe pas plus de m suites convergentes

$$x_{i,1}, \quad x_{i,2}, \quad \ldots, \quad x_{i,n}, \quad \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

non équivalentes deux à deux et telles que les suites correspondantes

$$f(x_{i,1}), \quad f(x_{i,2}), \quad \ldots, \quad f(x_{i,n}), \quad \ldots$$

aient pour limite commune zéro. Supposons, en effet, qu'il y ait $m+1$ suites pareilles. On peut, s'étant donné une fraction positive ε aussi petite qu'on veut, prendre dans chacune de ces suites un terme de rang suffisamment élevé, x_1 dans la première, ..., x_r dans la $r^{\text{ième}}$, ..., de telle sorte que les $m+1$ nombres

$$f(x_1), \quad \ldots, \quad f(x_r), \quad \ldots, \quad f(x_{m+1})$$

soient en valeur absolue moindres que ε. On aura donc, en désignant par la lettre θ des facteurs compris entre -1 et $+1$, les $m+1$ relations suivantes

$$A_0 x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x_r + A_m = \theta_r \varepsilon$$
$$(r = 1, 2, \ldots, m+1),$$

qu'on peut résoudre par rapport aux $m+1$ coefficients A_0, ...,

A_m. Chacun d'eux s'exprime par une fraction dont le numérateur contient ε en facteur et dont le dénominateur est un déterminant bien connu, égal au produit de toutes les différences $x_p - x_r$. Or, les suites d'où proviennent x_p et x_r n'étant pas équivalentes, toutes les différences $x_p - x_r$ sont supérieures à un certain nombre qu'on peut assigner. Donc, les coefficients $A_0, \ldots, A_m$ du polynome sont inférieurs à tout nombre, si petit qu'il soit. Ils sont donc tous nuls, si le polynome admet plus de m racines.

III. — Fonction inverse d'une fonction continue et croissante.

5. Du théorème important que nous venons d'établir (n° 3) résulte l'existence de la *fonction inverse* d'une fonction $f(x)$ *continue et croissante* (*ou décroissante*) *dans un intervalle* (a, b). Posons, en effet,

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(b).$$

Nous savons que, si l'on donne un nombre *quelconque* y, *compris entre* y_0 *et* y_1, il existe une suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de nombres compris entre a et b, et tels que la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ a pour limite y. De plus, toute suite équivalente à $x_1, x_2, \ldots$ jouit de la même propriété, parce que $f(x)$ est continue (Chap. III, n° 6) et toute suite qui jouit de la même propriété est équivalente à $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, parce que $f(x)$ est croissante. Donc cette suite $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ remplit les conditions requises pour définir une fonction $\varphi(y)$. C'est cette fonction $\varphi(y)$ que nous appellerons la *fonction inverse de* $f(x)$.

Théorème. — *La fonction inverse d'une fonction continue et croissante dans un intervalle est elle-même continue et croissante dans l'intervalle correspondant.*

Si $\varphi(y)$ n'est pas continue dans l'intervalle (y_0, y_1), on peut y trouver deux nombres y, y' aussi voisins qu'on veut et tels qu'on ait

$$|\varphi(y') - \varphi(y)| = |x'_n - x_n| > \alpha,$$

α étant un nombre assignable. Comme $f(x)$ est croissante, $f(x'_n)$ par exemple surpasse $f(x_n)$ d'un certain nombre $3h$. Or $f(x_n)$

tendant vers y et $f(x'_n)$ vers y', on a

$$f(x_n) = y + \varepsilon_n, \qquad f(x'_n) = y' + \varepsilon'_n;$$

les fractions ε_n et ε'_n devenant, quand n augmente, aussi petites qu'on veut, tomberont au-dessous de h. Dès lors, on aura

$$|y' - y| > |f(x'_n) - f(x_n)| - |\varepsilon'_n| - |\varepsilon_n| > h,$$

contrairement à l'hypothèse d'après laquelle y' et y sont aussi voisins qu'on veut.

Je dis que $\varphi(y)$ est croissante dans l'intervalle (y_0, y_1). Soient en effet y et y' deux nombres compris entre y_0 et y_1. Si y est moindre que y', on a, pour n suffisamment grand,

$$f(x'_n) > f(x_n).$$

Comme $f(x)$ est croissante, cette inégalité entraîne $x'_n > x_n$, ou bien $\varphi(y') > \varphi(y)$, ce qui prouve que $\varphi(y)$ est croissante.

Remarque I. — La démonstration ci-dessus exige que $f(x)$ soit *croissante dans tout l'intervalle* (a, b). Si elle était seulement *non décroissante* dans une partie de l'intervalle, la fonction inverse pourrait n'être pas continue. Ainsi, supposons $f(x)$ croissante entre a et x_0, puis constamment égale à c entre x_0 et x_1, de nouveau croissante entre x_1 et b, et d'ailleurs continue dans tout l'intervalle (a, b). Elle admet bien une fonction inverse $\varphi(y)$; mais celle-ci n'est pas continue dans tout l'intervalle de $y_0 = f(a)$ à $y_1 = f(b)$, puisqu'elle tend vers x_0 quand y tend vers c par valeurs croissantes et vers x_1 quand y tend vers c par valeurs décroissantes. De plus, pour $y = c$, elle prend *toutes* les valeurs intermédiaires entre x_0 et x_1.

Remarque II. — Il n'est pas besoin d'insister sur l'importance du théorème précédent, qui fait correspondre à toute fonction continue et croissante une fonction inverse douée des mêmes propriétés. Il ne s'applique, il est vrai, qu'à une classe de fonctions très restreinte, même parmi les fonctions continues, car l'intervalle où une fonction est continue n'est pas, en général, décomposable en un certain nombre d'autres intervalles, où elle soit croissante ou décroissante. Mais, si les fonctions pour les-

quelles cette décomposition est possible sont relativement peu nombreuses, elles ont une importance considérable, parce que ee sont celles qui se présentent dans les applications de l'Analyse aux phénomènes naturels.

IV. — Fonctions définies à l'aide d'un paramètre auxiliaire.

6. Étant données deux fonctions de t,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

on peut se demander à quelles conditions y est une fonction de x. Voici un cas très étendu où il en est ainsi. On suppose que x est une fonction de t, *continue et croissante* dans l'intervalle (t_0, T) et que y est une fonction *continue* de t dans le même intervalle. Je dis que y est une fonction continue de x dans l'intervalle de $x_0 = \varphi(t_0)$ à $\mathrm{X} = \varphi(\mathrm{T})$.

Donnons-nous, en effet, un nombre x dans ce dernier intervalle. Comme $\varphi(t)$ est continue et croissante entre t_0 et T, elle admet (n° 5) une fonction inverse dans l'intervalle (x_0, X). Cela veut dire qu'au nombre x correspond une suite convergente $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, dont on a appris à calculer les termes. Puisque $\psi(t)$ est une fonction continue, l'une quelconque des suites

$$\psi(t_1), \quad \psi(t_2), \quad \ldots, \quad \psi(t_n), \quad \ldots$$

est convergente et toutes les suites qu'on peut former de cette façon sont équivalentes entre elles (Chap. III, n° 6). On fait donc ainsi correspondre au nombre x des suites $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ convergentes et équivalentes.

En second lieu, y est une fonction continue de x dans l'intervalle (x_0, X). Car si l'on se donne dans cet intervalle la suite convergente

$$x, \quad x', \quad x'', \quad \ldots,$$

on peut lui faire correspondre une suite convergente

$$t, \quad t', \quad t'', \quad \ldots,$$

en prenant chacun des nombres $t, t', t'', \ldots$, suffisamment éloigné dans la suite dont il fait partie, puisque t, d'après le théorème des fonctions inverses, est une fonction continue de x.

Puisque y est une fonction continue de t, à la suite

$$t, \quad t', \quad t'', \quad \ldots$$

on peut faire correspondre, toujours par le même procédé, une suite convergente

$$y, \quad y', \quad y'', \quad \ldots,$$

ou toute autre, nécessairement équivalente à celle-là. Ainsi, à la suite convergente $x, x', x'', \ldots$ correspond une suite $y, y', y'', \ldots$, elle-même convergente, ce qui démontre que y est une fonction continue de x, dans l'intervalle considéré.

V. — Équations fonctionnelles.

7. En définissant les fonctions d'une variable nous avons signalé (Chap. II, n° 4) un type de problèmes que les applications conduisent à généraliser de la manière suivante :

On considère plusieurs nombres $x, x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ appartenant à un certain intervalle (a, b) et dont les uns $x, x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont quelconques dans l'intervalle, tandis que les autres $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sont connus lorsque les premiers sont donnés. On demande de faire correspondre au nombre quelconque x un nombre $f(x)$ par la condition qu'une certaine suite d'opérations arithmétiques, effectuées sur les nombres $x, x_1, \ldots, x_n, f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ donne pour résultat zéro, ce que nous exprimons par l'équation

$$\Phi[x, x_1, \ldots, x_n; f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n)] = 0.$$

Le cas où n est nul est celui dont nous avons déjà parlé. Déjà, dans ce cas, le problème est d'ordinaire insoluble. Nous en avons modifié l'énoncé en demandant de trouver pour chaque nombre x compris entre a et b une suite convergente $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, telle que les opérations dont Φ est le symbole, effectuées sur x et sur les divers termes de cette suite, aient pour résultats des nombres tendant vers zéro. Nous sommes convenus de dire que le problème était *résolu par une fonction* $f(x)$, quand les termes de toute suite équivalente à $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$,

soumis avec x aux opérations Φ, donnaient aussi pour résultats des nombres tendant vers zéro.

C'est dans le même sens que nous entendrons le problème plus général que nous venons de poser. Seulement, quand les opérations Φ portent sur plus d'un x, on peut, en général, à diverses valeurs particulières de la variable, faire correspondre autant de suites convergentes $f(x)$ choisies arbitrairement. Mais, ces suites une fois données, celles qui correspondent aux autres valeurs x sont pleinement déterminées dès le moment que l'on considère comme formant une seule suite *distincte* tout ensemble de suites équivalentes entre elles.

VI. — La fonction exponentielle considérée comme solution d'une équation fonctionnelle.

8. Ces considérations vont se préciser à propos de la fonction par laquelle nous allons résoudre l'équation

$$f(x)f(x_1) - f(x + x_1) = 0,$$

qui rentre visiblement dans le type général $\Phi = 0$. Pour éviter les indices, nous écrirons

$$f(x + h) = f(x)f(h). \tag{1}$$

A cette équation nous adjoindrons l'hypothèse complémentaire

$$f(1) = a,$$

a étant un nombre que nous nous donnons *arbitrairement,* mais qui, comme on va le voir, doit être positif. Mais nous ne supposerons *rien de plus* sur la fonction cherchée. Ainsi nous ne l'assujettirons pas à être continue, ni seulement finie.

On voit d'abord que la fonction $f(x)$, si elle existe, est toujours positive. Car si, dans l'équation (1), on change x en $\frac{x}{2}$ et qu'on prenne $h = \frac{x}{2}$, on trouve

$$f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

D'après cela, le nombre $a = f(1)$ ne peut être que positif ou

nul. Or, si l'on fait $h = 1$ dans l'équation (1), il vient

$$f(x+1) = af(x).$$

L'hypothèse $a = 0$ entraînerait donc $f(x+1) = 0$, quel que fût x. Écartons cette solution sans intérêt et faisons $x = 0$. Il viendra

$$a = af(0).$$

Ainsi $f(0) = 1$. Dès lors, nous pouvons ne donner à x que des valeurs positives. Car, pour $h = -x$, l'équation (1) donne

$$f(-x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}.$$

Cela posé, donnons à x une valeur positive quelconque $\frac{p-1}{q}$, à h la valeur $\frac{1}{q}$. Nous aurons, en vertu de l'équation (1),

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p-1}{q}\right) f\left(\frac{1}{q}\right).$$

Laissant fixe le dénominateur q, donnons à l'entier p successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, p-1, p$. Nous obtenons des relations, qui, multipliées membre à membre, donnent

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p.$$

Faisons maintenant $p = q$. En vertu de notre définition des fonctions, $f\left(\frac{q}{q}\right)$ est le même nombre que $f(1)$, c'est-à-dire a. On a donc

$$a = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q.$$

Élevons les deux membres de cette égalité à la puissance p, ceux de la précédente à la puissance q. Nous trouvons ainsi

$$a^p = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^{pq} = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q,$$

ou, en désignant pour abréger $f\left(\frac{p}{q}\right)$ par y,

$$y^q = a^p.$$

Si donc la fonction $y = f(x)$ existe, elle devra satisfaire à

cette égalité. Ceci nous conduit à chercher une fonction y de $x = \frac{p}{q}$ qui soit toujours positive et telle qu'on ait

$$y^q = a^p.$$

9. Sauf le cas exceptionnel où a^p est la puissance $q^{\text{ième}}$ exacte d'un entier ou d'une fraction, il n'existe pas de nombre y, qui, élevé à la puissance q, reproduise a^p. Mais on peut former une suite convergente de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots$, tels que les différences

$$\delta_r = y_r^q - a^p.$$

tendent vers zéro quand r augmente.

En effet, considérons les racines $q^{\text{ièmes}}$ de a^p, à 10^{-r} près, par défaut et par excès, $z_r 10^{-r}$ et $(z_r + 1) 10^{-r}$, que l'arithmétique enseigne à calculer. Le nombre a^p étant compris entre leurs puissances $q^{\text{ièmes}}$, si l'on prend pour y_r la racine par défaut, on aura

$$\delta_r = | z_r^q - a^p | < \frac{(z_r + 1)^q}{10^{qr}} - \frac{z_r^q}{10^{qr}}.$$

Or l'identité

$$(z_r + 1)^q - z_r^q = (z_r + 1)^{q-1} + (z_r + 1)^{q-2} z_r + \ldots + z_r^{q-1}$$

donne immédiatement

$$(z_r + 1)^q - z_r^q < q(z_r + 1)^{q-1},$$

d'où résulte

$$\delta_r < \frac{q}{10^r} \left(\frac{z_r + 1}{10^r} \right)^{q-1}.$$

Mais on sait (Chap. I, n° 5) que les racines par excès à $\frac{1}{10^r}$ près diminuent quand r augmente. Donc, si $z_0 + 1$ est la racine à une unité près par excès, on aura, *a fortiori*,

$$\delta_r < \frac{q}{10^r} (z_0 + 1)^{q-1}.$$

La différence δ_r tendant vers zéro quand r augmente, la suite convergente dont $y_r = z_r 10^{-r}$ est un terme répond à la question. Nous avons ainsi trouvé pour chaque nombre $x = \frac{p}{q}$ une suite convergente $y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots$.

10. Mais cela ne suffit pas pour définir une fonction y de x. Il faut encore que les termes de toute suite (y'_r) équivalente à (y_r) rendent les différences

$$(y'_r)^q - a^p$$

aussi petites qu'on voudra, pour r suffisamment grand. C'est ce qui résulte (Chap. III, n° 6) de la continuité de la fonction z^q. De plus, toute suite convergente (y''_r) composée de termes positifs, convergente mais non équivalente à (y_r), ne jouit pas de cette propriété, parce que la fonction z^q est continue et croissante si $z > 1$, continue et décroissante si $z < 1$, de sorte qu'il n'y a qu'*une* fonction y répondant à la question.

11. Il reste encore à vérifier une dernière condition, celle que traduit l'égalité

$$f\left(\frac{\lambda p}{\lambda q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nous avons à montrer que toute suite convergente (η_r) dont les termes rendent aussi petite qu'on veut la différence

$$(\eta_r)^{\lambda q} - a^{\lambda p}$$

est équivalente à la suite (y_r) des racines de a^p calculées par défaut. Cela revient à prouver que la différence

$$\delta' = |(y_r)^{\lambda q} - a^{\lambda p}|$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut pour r suffisamment grand. C'est ce qui résulte de l'identité

$$\begin{aligned} y_r^{\lambda q} - a^{\lambda p} &= (y_r^q)^\lambda - (a^p)^\lambda \\ &= (y_r^q - a^p)\left[(y_r^q)^{\lambda-1} + (y_r^q)^{\lambda-2} a^p + \ldots + y_r^q a^{p(\lambda-2)} + a^{p(\lambda-1)}\right]. \end{aligned}$$

Car y_r étant une racine $q^{\text{ième}}$ de a^p par défaut, $(y_r)^q$ est plus petit que a^p. On a donc

$$\delta' < \lambda a^{p(\lambda-1)}(y_r^q - a^p) = \lambda a^{p(\lambda-1)} \delta_r;$$

δ_r étant aussi petit qu'on veut, la proposition est démontrée.

Ainsi, *la condition*

$$y^q = a^p$$

définit bien une fonction y de $\frac{p}{q}$ et une seule. si l'on assujettit cette fonction à être positive.

C'est cette fonction y que nous désignerons par $a^{\frac{p}{q}}$ ou par a^x; sa valeur est l'un quelconque des termes de la suite (y_r) à partir d'un rang suffisamment éloigné.

12. Mais il reste à montrer que cette fonction satisfait bien à la condition

$$f(x+h)=f(x)f(h),$$

qui, avec nos notations actuelles, s'écrit

$$a^{\frac{p}{q}}\, a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}.$$

Je dis que, *étant donnée une fraction positive* ε, *aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un indice r tel que les différences*

$$\Delta = |y_{r+n}y_{r+n'} - y_{r+N}|,$$

où y_{r+n}, $y_{r+n'}$, y_{r+N} sont des termes des trois suites qui définissent

$$a^{\frac{p}{q}},\quad a^{\frac{p'}{q'}},\quad a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}},$$

soient toutes positives, n, n', N étant des entiers positifs arbitraires.

Pour le montrer, posons

$$P = pq',\qquad P' = p'q,\qquad Q = qq',$$

d'où résulte

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q},\qquad \frac{p'}{q'} = \frac{P'}{Q},\qquad \frac{p}{q}+\frac{p'}{q'} = \frac{P+P'}{Q}.$$

Nous avons vu que, si r est suffisamment grand, quelle que soit la fraction positive η donnée aussi petite qu'on veut, on a

$$\left.\begin{aligned}(y_{r+n})^Q &= a^P + \vartheta\eta\\ (y_{r+n'})^Q &= a^{P'} + \vartheta'\eta\\ (y_{r+N})^Q &= a^{P+P'} + \theta\eta\end{aligned}\right\}\qquad (-1 < \vartheta,\ \vartheta',\ \theta < 1).$$

De là résulte

$$(y_{r+n}y_{r+n'})^{Q} - (y_{r+N})^{Q} = K\eta,$$

K étant un nombre fini, inférieur à un nombre assignable.

Si, pour un instant, nous désignons le produit $y_{r+n}y_{r+n'}$ par A et y_{r+N} par B, nous aurons

$$K\eta = A^{Q} - B^{Q} = (A - B)(A^{Q-1} + A^{Q-1}B + \ldots + B^{Q-1}),$$

par conséquent

$$\Delta = |A - B| = \frac{K\eta}{A^{Q-1} + A^{Q-2}B + \ldots + B^{Q-1}}.$$

Or, P, P′ et Q étant donnés, on peut fixer un nombre inférieur à ce dénominateur. Car les trois nombres y_{r+n}, $y_{r+n'}$, y_{r+N} sont supérieurs respectivement aux racines $Q^{\text{ièmes}}$, à une unité près par défaut, de a^{P}, de $a^{P'}$ et de $a^{P+P'}$. La proposition est donc démontrée.

VII. — Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle.

13. Nous allons établir maintenant deux propriétés importantes de la fonction exponentielle, qui consistent en ce qu'elle est *continue* dans tout intervalle, et *croissante* dans tout intervalle si $a > 1$, ce que nous supposerons, *décroissante* si $a < 1$. En vertu d'une remarque déjà faite (Chap. II, n° 3), il suffit de considérer *une* suite convergente définissant a^{x} pour chaque valeur de x. Nous choisirons la suite formée par les racines de a par défaut à 10^{-r} près. Soient ρ_0, ρ'_0, R_0 les racines $Q^{\text{ièmes}}$ entières par défaut de a^{P}, $a^{P'}$, $a^{P+P'}$. On voit aisément que le produit $\rho_0\rho'_0$ ne peut être supérieur à R_0, quand $a > 1$. Nous diminuerons donc le dénominateur de Δ en le remplaçant par $Q(\rho_0\rho'_0)^{Q-1}$. Quant au numérateur, il est égal à

$$\eta(\mathfrak{I}'a^{P} + \mathfrak{I}a^{P'} - \theta + \mathfrak{I}\mathfrak{I}'_{\eta}).$$

Mais, comme dans la relation

$$(y_{r+N})^{Q} = a^{P+P'} + \theta\eta,$$

nous désignons par y_{r+N} une racine $Q^{\text{ième}}$ de $a^{P+P'}$ par défaut

à 10^{-r} près, le nombre η est précisément celui que nous appelions plus haut δ. Il peut donc être pris égal à $Q(R_0+1)^{Q-1}10^{-s}$ et l'on a

$$\Delta \leqq \frac{M}{10^s},$$

M étant un nombre qu'on peut assigner quand on connaît P, P′ et Q. Il suffira donc de pousser assez loin l'extraction de la racine y_{r+N}, c'est-à-dire de faire s assez grand, pour que Δ tombe au-dessous de toute fraction donnée.

14. Théorème. — *La fonction a^x est croissante dans tout intervalle (x_0, X) si a est plus grand que* 1.

Prenons, en effet, dans cet intervalle, deux nombres *quelconques*, x et $x+h$, le premier moindre que le second; et soient

$$x = \frac{P}{Q}, \qquad h = \frac{P'}{Q}.$$

Nous avons

$$f(x+h) - f(x) = f(x)[f(h)-1] + \theta\Delta.$$

Or $f(h)$ et $f(x)$ sont des racines $Q^{\text{ièmes}}$, à une certaine unité décimale près, par défaut, de $a^{P'}$ et de a^P, et $a^{P'}$ est plus grand que 1. Il existe donc un certain ordre décimal $10^{-\alpha}$ auquel correspond une racine par défaut $\rho_\alpha 10^{-\alpha}$, plus grande que 1. En conséquence, si $f(x)$ est une racine à 10^{-s} près de a^P et si nous prenons s supérieur à ce nombre α qu'on vient de déterminer, comme $f(x)$ est plus grand que 1, on a certainement

$$f(x)[f(h)-1] > \frac{1}{10^\alpha}.$$

Maintenant nous pouvons, d'après ce qui a été dit, disposer de s de façon que Δ soit inférieur à $10^{-\alpha}$, puisque x et $x+h$ sont des nombres donnés à l'avance. Alors le second membre de l'équation précédente est positif et $f(x+h)$ est plus grand que $f(x)$. La fonction $f(x)$ est donc croissante *dans* tout l'intervalle, puisque x et $x+h$ sont deux nombres quelconques de l'intervalle (x_0, X).

15. Théorème. — *La fonction exponentielle est continue dans tout intervalle (x_0, X).*

En effet, si nous désignons toujours $p:q$ par x et $f(x)$ par y, nous avons

$$y^q < a^p,$$

puisque y est une racine par défaut. Effectuons la division de q par p et soit

$$q = mp + p_1 \qquad (p_1 < p).$$

Il vient

$$y^{mp} y^{p_1} < a^p.$$

Mais y est au moins égal à 1, comme racine d'un nombre a plus grand que 1; on a donc

$$y^{mp} < a^p, \qquad y^m < a,$$

ce qu'on peut écrire

$$[1 + (y - 1)]^m < a.$$

On conclut de là, *a fortiori,*

$$1 + m(y - 1) < a, \qquad y - 1 < \frac{a - 1}{m},$$

c'est-à-dire

$$y - 1 < \frac{(a-1)p}{q - p_1} < \frac{(a-1)p}{q-p} = \frac{(a-1)h}{1-h}.$$

On peut maintenant déterminer h de telle façon qu'il vienne

$$f(x + h) - f(x) < \varepsilon,$$

ε étant une fonction aussi petite qu'on voudra. Il suffit, en effet, pour cela, de satisfaire à l'inégalité

$$a^x \frac{(a-1)h}{1-h} + \Delta < \varepsilon.$$

Or l'exponentielle a^x étant une fonction croissante *dans* tout l'intervalle (x_0, X), on peut, dans l'inégalité à vérifier, remplacer a^x par a^{x_0} puisque $x_0 < x$. Déterminons maintenant h par la condition

$$a^{x_0} \frac{(a-1)h}{1-h} < \frac{\varepsilon}{2},$$

qui donne

$$h < h_0,$$

h_0 étant un nombre *indépendant* de la valeur considérée x.

Dès lors, si l'on prend pour h une fraction *quelconque moindre*

que h_0, on connaît les deux nombres

$$x = \frac{P}{Q}, \qquad x + h = \frac{P + P'}{Q}.$$

On peut donc choisir s, c'est-à-dire pousser l'extraction des racines $Q^{\text{ièmes}}$ de a^P, de $a^{P'}$ et de $a^{P+P'}$ assez loin pour que Δ soit moindre que $\varepsilon : 2$. Alors on aura visiblement

$$f(x + h) - f(x) < \varepsilon.$$

Comme le nombre h_0 est indépendant de x, la fonction exponentielle est *continue,* non seulement *pour* la valeur considérée, mais *dans* tout l'intervalle (x_0, X), qui est d'ailleurs quelconque.

16. *Remarque.* — Nous avons jusqu'ici considéré la base a de la fonction exponentielle comme un nombre fixe; et dans les applications, cette base devra recevoir toujours la même valeur, sans quoi l'on ne formerait pas avec a et x une fonction exponentielle. Mais on peut avoir à supposer que la base a, au lieu d'être un nombre fixe, soit un terme d'une suite convergente a_1, $a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$. Alors, *pour un même x donné, la suite*

$$a_1^x, \quad a_2^x, \quad \ldots, \quad a_n^x, \quad a_{n+1}^x, \quad \ldots$$

est elle-même convergente.

Posons, en effet

$$a_{n+1} = a_n(1 + \varepsilon_n),$$

et soit, pour fixer les idées, $\varepsilon_n > 0$. Nous aurons

$$a_{n+1}^x - a_n^x = a_n^x[(1 + \varepsilon_n)^x - 1].$$

Considérons seulement, pour abréger, le cas où x est positif et a plus grand que 1. Comme l'exponentielle croît avec x, on aura, si x est inférieur à 1,

$$(1 + \varepsilon_n)^x < 1 + \varepsilon_n;$$

par suite la différence précédente est inférieure à $a_n^x \varepsilon_n$.

Si x est supérieur à 1, appelons M l'entier qui lui est égal ou immédiatement supérieur. Comme, pour n suffisamment grand,

ε_n est inférieur à l'inverse de M, on vérifie aisément [1] l'inégalité

$$(1+\varepsilon_n)^M < 1 + 2M\varepsilon_n.$$

Par suite, la différence considérée est inférieure à $2Ma_n^x\varepsilon_n$, ce qui achève la démonstration.

VIII. — Fonction inverse de l'exponentielle : logarithme.

17. La fonction exponentielle $y = a^x$, étant continue et croissante (ou décroissante) dans tout intervalle (x_0, X), admet, d'après un théorème démontré plus haut (n° 5), une fonction inverse x qui jouit des mêmes propriétés dans l'intervalle

$$(y_0 = a^{x_0}, \qquad Y = a^X).$$

Cette fonction est dite le *logarithme* de y en base a; on la représente par le symbole $\log_a y$.

On reconnaît facilement que la limite inférieure y_0 de l'intervalle considéré ne peut jamais être un nombre négatif, mais peut être une fraction positive aussi petite qu'on voudra, tandis que la limite supérieure Y peut être un nombre positif aussi grand qu'on veut.

La propriété capitale de la fonction logarithmique est celle qu'exprime l'équation

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

Précisons le sens de cette relation avant de la démontrer. Nous nous donnons deux nombres y et y'. A ces deux nombres correspondent respectivement les deux suites convergentes

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+\nu}, \quad \ldots, \\ x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_{n+\nu}, \quad \ldots, \end{array}$$

---

[1] Soient m un entier positif et z un nombre positif, tel que $mz < 1$. On a

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{mz}{1}\frac{(m-1)z}{2} + \frac{mz}{1}\frac{(m-1)z}{2}\frac{(m-2)z}{3} + \ldots$$

$$< 1 + mz\left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{m!}\right) < 1 + 2mz.$$

telles que l'on ait

$$a^{x_{n+\nu}} = y + \theta\delta_n, \qquad a^{x'_{n+\nu}} = y' + \theta'\delta_n,$$

ν étant un entier positif quelconque, δ_n une fraction qui devient aussi petite qu'on veut quand n est suffisamment grand, θ et θ' deux nombres compris entre zéro et l'unité. C'est en cela que consiste l'existence de la fonction inverse x.

De même, au nombre $Y = yy'$ correspond une suite convergente

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{n+N}, \quad \ldots$$

et l'on a pareillement

$$a^{X_{n+N}} = Y + \mathfrak{Y}\delta_n.$$

Formons le produit yy' et égalons-le à Y; nous trouvons

$$a^{X_{n+N}} = a^{x_{n+\nu}+x'_{n+\nu}} + \delta_n\left(\mathfrak{Y} - \theta a^{x'_{n+\nu}} - \theta' a^{x_{n+\nu}} + \theta\theta'\delta_n\right).$$

Il résulte visiblement de là que la suite, dont X_{n+N} est le terme général, est équivalente à celle dont le terme général est $x_{n+\nu} + x'_{n+\nu}$. C'est précisément là ce qu'exprime l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

En s'appuyant sur cette relation, maintenant démontrée, on prouverait facilement celle-ci :

$$\log\left(y^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\log y,$$

qui exprime seulement l'équivalence de deux suites; $y^{\frac{p}{q}}$ est, en effet, l'un quelconque des termes de rang suffisamment éloigné d'une suite $z_1, z_2, \ldots$, tandis que le logarithme d'un quelconque z des termes de cette suite est lui-même défini par une suite convergente. Nous avons expliqué dans un cas tout à fait général (Chap. I, n° 15) comment doivent être formées les suites telles que celles dont il est ici question.

CHAPITRE V.

DÉRIVÉES. — PREMIERS EXEMPLES DE FONCTIONS UNIFORMÉMENT DIFFÉRENTIABLES.

Quand une fonction $f(x)$ est continue *pour* chaque valeur de x appartenant à un intervalle [1], il y a lieu d'étudier le rapport de l'accroissement de cette fonction à celui de la variable : l'étude de ce rapport, dans certains cas, conduit à la notion de *dérivée*, l'une des plus fondamentales de l'Analyse. Après avoir précisé cette notion, nous définirons les fonctions particulièrement importantes qui jouissent de la propriété d'être *uniformément différentiables*, et nous donnerons quelques exemples de pareilles fonctions.

I. — Cas où la fonction est définie par des nombres.

1. Pour plus de simplicité, nous ne considérerons d'abord que le cas où la fonction $f(x)$ est pour chaque valeur x un nombre déterminé, et non un terme de rang suffisamment élevé d'une suite convergente.

A une valeur $x+h$ correspond le *nombre* $f(x+h)$; la différence

$$k = f(x+h) - f(x)$$

est l'*accroissement* de la fonction f pour l'accroissement h de la variable à partir de la valeur x. Considérons maintenant des accroissements h, h', h'', ..., formant une suite convergente qui ait pour limite zéro, et soient k, k', k'', ..., les accroissements

[1] Ce qui n'entraîne pas, rappelons-le, qu'elle soit continue *dans* cet intervalle (*voir* Chap. III, n° 7).

correspondants de la fonction. Nous formons la suite des rapports

$$(1) \qquad \frac{k}{h}, \quad \frac{k'}{h'}, \quad \frac{k''}{h''}, \quad \ldots.$$

Suivant la fonction $f(x)$ que l'on considère, cette suite sera ou ne sera pas convergente. Quand elle est convergente et quand, de plus, *toute* suite analogue de rapports

$$(2) \qquad \frac{k_1}{h_1}, \quad \frac{k'_1}{h'_1}, \quad \frac{k''_1}{h''_1}, \quad \ldots,$$

ayant pour dénominateur des nombres qui tendent vers zéro est elle-même convergente et équivalente à la première suite, la fonction $f(x)$ jouit de propriétés qui la rendent particulièrement remarquable.

On donne un même nom à tous les termes de la suite

$$(1) \qquad \frac{k}{h}, \quad \frac{k'}{h'}, \quad \frac{k''}{h''}, \quad \ldots,$$

à partir d'un rang suffisamment éloigné : on appelle chacun d'eux *la dérivée* de la fonction $f(x)$ pour la valeur x considérée, et l'on dit que la fonction $f(x)$ *admet* une dérivée pour cette valeur.

Lorsque la fonction admet une dérivée *pour chaque valeur* x comprise dans un intervalle (x_0, X), *cette dérivée est elle-même une fonction de* x puisque à chaque valeur x correspond *une* suite convergente (1) dont la dérivée est un terme, et *une seule* si l'on ne regarde pas comme distinctes les suites équivalentes telles que (2). On représente cette fonction dérivée par $f'(x)$.

Remarque. — En vertu de notre définition des fonctions, *toute* suite équivalente à la suite (1), *alors même qu'elle ne serait pas formée de la même façon,* est également propre à définir la dérivée. C'est là une observation très importante, sur laquelle repose, au fond, le calcul des dérivées.

Pour former les dérivées, on évite, quand cela est possible, le calcul direct du rapport des deux accroissements k et h; on cherche à construire de toutes pièces une fonction, c'est-à-dire un ensemble de suites équivalentes à celle dont on est parti pour définir la dérivée, mais donnant lieu à des calculs moins pénibles.

2. *Exemple.* — La fonction la plus simple que l'on puisse définir à la façon de celles dont il s'agit ici est la fonction

$$y = x^m,$$

où m est un entier positif. Il est aisé de voir qu'elle admet une dérivée pour toute valeur x. En effet, si l'on donne à x un accroissement h et qu'on désigne par k l'accroissement correspondant de la fonction y, on aura

$$k = (x+h)^m - x^m,$$

Appliquant la formule du binome, on trouve

$$\frac{k}{h} = mx^{m-1} + \mathrm{R},$$

les $m-1$ termes dont la somme est désignée par R contenant en facteur, le premier h, le second h^2, ..., le dernier h^{m-1}. Il est manifeste que, quelle que soit la loi suivant laquelle on fera tendre h vers zéro, le rapport $k : h$ tend vers mx^{m-1}. Telle est donc la dérivée de la fonction x^m.

II. — Cas où la fonction est définie par des suites convergentes.

3. Nous arrivons maintenant au cas où la fonction $f(x)$ est définie par un ensemble de suites convergentes. Soit, pour la valeur x, la suite

$$(3) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_{n_1}(x),\ \ldots,\ f_{n_2}(x),\ \ldots.$$

Si h_1, h_2, ... sont des nombres tendant vers zéro suivant une certaine loi, les valeurs de la fonction f pour $x+h_1$, $x+h_2$, ..., seront respectivement définies par les suites convergentes

$$\begin{array}{lllll}
(4) & f_1(x+h_1), & f_2(x+h_1), & \ldots, & f_{r_1}(x+h_1), \ \ldots, \\
(5) & f_1(x+h_2), & f_2(x+h_2), & \ldots, & f_{r_2}(x+h_2), \ \ldots, \\
 & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \ \ldots.
\end{array}$$

Supposons qu'en rapprochant les termes de la suite (3) de ceux de la suite (4), puis de ceux de la suite (5), et des autres, on ait

pu constituer une suite convergente

$$(6)\qquad \frac{f_{r_1}(x+h_1)-f_{n_1}(x)}{h_1},\quad \frac{f_{r_2}(x+h_2)-f_{n_2}(x)}{h_2},\quad \ldots.$$

Supposons, en outre, qu'à *toute autre suite* h'_1, h'_2, ... de nombres tendant vers zéro on puisse faire correspondre une suite analogue à la précédente, et qui lui soit équivalente; on dit alors que la fonction f admet une dérivée pour la valeur considérée x, et cette dérivée $f'(x)$ est l'un quelconque des rapports qui composent ces diverses suites.

Insistons, pour préciser davantage, sur les indices n_1, r_1, n_2, r_2, ..., dont la grandeur doit être dans une certaine relation avec la petitesse des accroissements correspondants h_1, h_2, ... En effet, la notion de dérivée, telle que nous venons de la définir, serait illusoire, si, en prenant, pour former les numérateurs des rapports qui composent la suite (6), des termes de rang plus élevé que ceux qui ont été empruntés à la suite (3) et respectivement aux suites (4), (5), ..., on obtenait une nouvelle suite

$$(6)'\qquad \frac{f_{r'_1}(x+h_1)-f_{n'_1}(x)}{h_1},\quad \frac{f_{r'_2}(x+h_2)-f_{n'_2}(x)}{h_2},\quad \ldots,$$

non équivalente à la suite (6). Mais nous allons montrer qu'il n'en peut être ainsi, si les indices n_i, r_i ont été pris *suffisamment grands*.

Voici ce qu'il faut entendre par ces mots. Donnons-nous une suite *quelconque* ε_1, ε_2, ..., de nombres tendant vers zéro. Puisque la suite (3) est convergente, on peut déterminer l'indice n_1 de telle manière que, p étant un entier positif quelconque, on ait

$$|f_{n_1}(x)-f_{n_{1+p}}(x)|<\frac{\varepsilon_1 h_1}{2}.$$

De même, la suite (5) étant convergente, on peut déterminer r_1 de manière à vérifier, quel que soit l'entier positif q, l'inégalité

$$|f_{r_1}(x+h_1)-f_{r_{1+q}}(x+h_1)|<\frac{\varepsilon_1 h_1}{2}.$$

En déterminant d'une manière analogue les indices h_2, r_2 et les

suivants, on s'assurera que toute suite telle que (6)′ peut s'écrire

$$\frac{f_{r_1}(x+h_1)-f_{n_1}(x)}{h_1}+\theta_1\varepsilon_1,\quad \frac{f_{r_2}(x+h_2)-f_{n_2}(x)}{h_2}+\theta_2\varepsilon_2,\quad \ldots,$$

les fractions θ_i étant comprises entre -1 et $+1$, c'est-à-dire que toute suite de cette espèce est *équivalente* à la suite (6).

4. Nous avons dû, dans ce qui précède, supposer la fonction $f(x)$ donnée par une suite convergente *déterminée,* la suite (3). Mais nous savons qu'elle peut aussi être définie par toute suite *équivalente*

$$(7)\qquad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_{n_1}(x),\quad \ldots,\quad \varphi_{n_2}(x),\quad \ldots.$$

Il faut donc que l'on puisse, dans la formation de la dérivée, substituer cette nouvelle suite à la suite (3). C'est ce qui a lieu en effet. Pour le montrer, considérons la suite

$$(8)\qquad \frac{\varphi_{r_1}(x+h_1)-\varphi_{n_1}(x)}{h_1},\quad \frac{\varphi_{r_2}(x+h_2)-\varphi_{n_2}(x)}{h_2},\quad \ldots,$$

qui est l'analogue de la suite (6), et donnons-nous une suite de nombres ε'_1, ε'_2, ..., convergeant vers zéro. En vertu de l'équivalence des suites (3) et (7) et de la continuité de la fonction *pour* la valeur x, on peut choisir n_1 et r_1 de manière à vérifier les deux inégalités

$$|\varphi_{n_1}(x)-f_{n_1}(x)|<\frac{\varepsilon'_1 h_1}{2},\qquad |\varphi_{r_1}(x+h_1)-f_{r_1}(x+h_1)|<\frac{\varepsilon'_1 h_1}{2}.$$

On déterminera d'une façon analogue les indices n_2, r_2 et les suivants. Dès lors, la suite (8) pourra s'écrire

$$\frac{f_{r_1}(x+h_1)-f_{n_1}(x)}{h_1}+\theta'_1\varepsilon'_1,\quad \frac{f_{r_2}(x+h_2)-f_{n_2}(x)}{h_2}+\theta'_2\varepsilon'_2,\quad \ldots$$
$$(-1<\theta'_i<1),$$

ce qui prouve qu'elle est équivalente à la suite (6).

On comprendra mieux l'importance de la remarque précédente si l'on observe qu'elle revient à ceci : si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont identiques pour toutes les valeurs x appartenant à un intervalle et si l'une d'elles admet une dérivée, la seconde en

admet une aussi et ces deux dérivées sont identiques. C'est là une conclusion fort utile. Par exemple, quand $\varphi(x)$ est une série, il est, en général, impossible de reconnaître si elle admet ou n'admet pas de dérivée. Mais, si l'on sait *sommer* la série $\varphi(x)$, c'est-à-dire si l'on parvient à prouver qu'elle est identique à une fonction connue, admettant une dérivée, on est assuré, par là même, que la série a une dérivée et l'on sait la trouver.

III. — Variations de la fonction et signes de la dérivée. Fonctions à dérivée nulle.

5. Quand une fonction admettant une dérivée est croissante *pour* toutes les valeurs x appartenant à un intervalle, cette dérivée ne peut être que positive ou nulle, puisque, d'après la définition des fonctions croissantes, aucun des termes de la suite

$$\frac{k}{h}, \quad \frac{k'}{h'}, \quad \frac{k''}{h''}, \quad \ldots,$$

n'est négatif. Il peut arriver, d'ailleurs, que cette suite tende vers zéro, auquel cas la dérivée est nulle.

Réciproquement, si la dérivée est positive dans tout un intervalle, la fonction est croissante *pour* chaque valeur x appartenant à l'intervalle; mais cela n'entraîne pas qu'elle soit croissante *dans* tout l'intervalle (Chap. III, n° 9).

Enfin, si la fonction est constante dans tout un intervalle, elle a une dérivée, et cette dérivée est nulle pour toutes les valeurs x de l'intervalle.

Les trois propositions que nous venons d'énoncer ne doivent pas être considérées comme évidentes *a priori*. On les démontrera en se reportant aux définitions précises que nous avons données (Chap. III, n° 9) des fonctions croissantes et des fonctions constantes. On conçoit d'ailleurs que des résultats destinés à avoir un aussi grand retentissement dans toute l'Analyse ne puissent pas être le résultat de quelque constatation banale.

Nous insisterons sur la réciproque du dernier énoncé :

Si la dérivée d'une fonction est nulle pour toutes les valeurs

appartenant à un intervalle, il ne s'ensuit pas que la fonction soit constante dans tout cet intervalle.

Voici un premier exemple qui le montre bien :

Soit un intervalle rationnel quelconque (0, 1) ou tout autre, que nous décomposerons en deux intervalles irrationnels (e_1) et (e_2) : dans le premier intervalle (e_1) la fonction $f(x)$ a une valeur constante a_1; dans le second, une valeur constante a_2, *différente de* a_1. Cette fonction admet une dérivée pour *toutes* les valeurs x, sans exception, appartenant à l'intervalle total (0, 1), et cette dérivée est *nulle*. Néanmoins la fonction n'est pas constante dans tout cet intervalle.

A la vérité, cet exemple est peu intéressant, parce que la fonction est discontinue dans l'intervalle total et surtout parce que cet intervalle est décomposable en deux autres, dans chacun desquels la fonction est constante. Mais on peut construire des fonctions continues *dans* tout un intervalle qu'on ne peut pas décomposer en un nombre déterminé de sous-intervalles où elles soient constantes, fonctions qui ont cependant une dérivée constamment nulle dans l'intervalle considéré.

6. Voici la définition d'une fonction $f(x)$ jouissant de ces propriétés dans l'intervalle (0, 1). Nous donnons à $f(x)$ la valeur zéro pour $x = 0$ et la valeur a pour $x = 1$; nous divisons l'intervalle (0, 1) en trois autres intervalles *irrationnels* e_1, e_2, e_3 tels que le second e_2 comprenne la valeur $x = \frac{1}{2}$. Nous donnons à $f(x)$ dans tout l'intervalle e_2 la valeur constante

$$\frac{1}{2}(0 + a) = \frac{a}{2}.$$

Ainsi $f(x)$ est définie dans l'intervalle e_2; elle ne l'est pas encore dans les intervalles e_1, e_3.

Pour abréger, nous appellerons intervalle *plein* un intervalle dans tout lequel la fonction est définie; intervalle *vide* un intervalle où elle ne l'est pas. Ainsi e_2 est un intervalle plein; e_1, e_3 sont des intervalles vides. Nous considérerons la valeur $x = 0$ et la valeur $x = 1$ comme des intervalles pleins.

Maintenant nous divisons les intervalles vides e_1, e_3, respecti-

vement en trois autres *irrationnels* e'_1, e''_1, e'''_1; e'_3, e''_3, e'''_3. Sauf les intervalles qui commencent à zéro et ceux qui finissent à 1, tous les intervalles dont nous parlerons sont irrationnels à leurs deux limites.

Si les deux fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ ne sont pas déjà comprises dans l'intervalle e_2, nous opérons le nouveau fractionnement de façon que e''_1 comprenne $x = \frac{1}{3}$ et que e''_3 comprenne $x = \frac{2}{3}$. Dans le cas contraire, le fractionnement sera fait d'une façon absolument quelconque. Dans l'un et l'autre cas, nous attribuons à $f(x)$ dans l'intervalle e''_1 la valeur constante

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2^2},$$

qui est la moyenne des valeurs relatives aux deux intervalles pleins entre lesquels est compris e''_1, et dans l'intervalle e''_3 la valeur constante

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3a}{2^2},$$

moyenne des valeurs relatives aux deux intervalles pleins entre lesquels est compris e''_3.

En résumé, après ce second fractionnement, nous nous trouvons avoir créé 7 intervalles, alternativement vides et pleins et tels que la différence des valeurs de la fonction dans deux intervalles pleins consécutifs est $a : 2^2$.

Continuons à diviser les intervalles vides chacun en trois intervalles irrationnels et faisons en sorte que toutes les fractions de dénominateur 4, puis toutes celles de dénominateur 5, etc., soient dans des intervalles pleins; de plus, donnons toujours pour valeur à $f(x)$ dans chaque nouvel intervalle plein la moyenne des valeurs relatives aux deux intervalles pleins qui le comprennent.

On voit que la fonction $f(x)$ se trouvera ainsi définie *pour toute valeur énonçable* x. Remarquons en outre qu'après q fractionnements les valeurs de $f(x)$ dans deux intervalles pleins consécutifs diffèrent de $a : 2^q$.

Nous allons établir la *continuité* de $f(x)$ *dans* tout l'intervalle $(0, 1)$. Étant donnée une fraction positive ε_1 aussi petite qu'on

veut, montrons qu'il existe un nombre α tel que, x et x' étant quelconques dans l'intervalle, mais différant de moins de α, on a

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Déterminons, à cet effet, le plus grand entier q qui vérifie l'inégalité $a : 2^q < \varepsilon$ et appelons δ_q l'amplitude du plus petit des intervalles qui restent vides après le $q^{\text{ième}}$ fractionnement. Je dis que le nombre cherché α peut être pris égal à δ_q. Car, x et x' différant de moins de δ_q, de deux choses l'une :

1° Ou bien x et x' appartiennent au même intervalle plein; alors la fonction étant constante dans un pareil intervalle, la différence $f(x') - f(x)$ est nulle, conséquemment plus petite que ε.

2° Ou bien x et x' appartiennent à deux intervalles pleins différents; alors, comme leur différence est moindre que δ_q, l'un de ces deux nombres appartient forcément à un intervalle créé par un fonctionnement plus avancé que le $q^{\text{ième}}$, et, d'après la loi de formation des intervalles pleins, on a

$$|f(x') - f(x)| < \frac{a}{2^{q+r}} < \varepsilon.$$

La continuité de la fonction dans *tout* l'intervalle (0_2) est ainsi démontrée.

Dans tout ceci, nous ne nous sommes pas servis de l'hypothèse que les intervalles sont irrationnels. Nous l'utiliserons maintenant.

Donnons-nous un nombre quelconque x. Il est compris dans un certain intervalle plein, et, comme les deux suites convergentes qui définissent cet intervalle sont irrationnelles, aucune d'elles n'a pour limite x. On pourra donc toujours trouver un nombre β (qui dépend essentiellement de x et change généralement avec x), tel que h étant arbitraire, positif ou négatif, mais plus petit que β en valeur absolue, $x + h$ se trouve compris dans le même intervalle que x. Mais alors $f(x + h)$ a la même valeur que $f(x)$. Donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

C'est-à-dire que $f(x)$ a une dérivée constamment nulle. Cependant $f(x)$, on le voit, est continue et n'est pas constante dans l'intervalle $(0, 1)$. Il est même impossible de décomposer cet

intervalle en un nombre déterminé d'autres intervalles où $f(x)$ conserve une valeur constante.

IV. — Formation de fonctions admettant une dérivée. Dérivée d'une fonction de fonction.

7. Quand on connaît des fonctions douées de dérivées, on peut, à l'aide de ces fonctions, en former d'autres jouissant de la même propriété. Soient, en effet, u et v deux fonctions admettant des dérivées pour toutes les valeurs x d'un certain intervalle : la somme $u+v$, le produit uv, le quotient $u:v$ sont des fonctions qui admettent dans le même intervalle (sauf $u:v$ pour les racines de v) des dérivées faciles à déterminer [1].

Nous ne nous attarderons pas à démontrer des règles bien connues ; mais nous devons insister sur les fonctions de fonctions.

8. Une fonction $u=\varphi(x)$ étant définie dans un intervalle (x_0, x_1) et une autre fonction $y=f(u)$ étant définie dans l'intervalle $u_0=\varphi(x_0)$, $u_1=\varphi(x_1)$, qui correspond au précédent, la question se pose de savoir si y est une fonction de x. On ne peut affirmer qu'il en soit ainsi en général ; mais il y a un cas où l'affirmation est exacte : c'est celui où $f(u)$ est une fonction continue *dans* l'intervalle (u_0, u_1).

En effet, $\varphi(x)$ est l'un quelconque des termes u', u'', u''', ... d'une certaine suite convergente. D'autre part, $f(u')$, $f(u'')$, $f(u''')$, ... sont respectivement les termes de rang suffisamment élevé de suites convergentes

$$\begin{array}{llllll} y'_1, & y'_2, & y'_3, & \ldots, & y'_{n'}, & \ldots, \\ y''_1, & y''_2, & y''_3, & \ldots, & y''_{n''}, & \ldots, \\ y'''_1, & y'''_2, & y'''_3, & \ldots & y'''_{n'''}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

Formons la suite

$$y'_{n'},\quad y''_{n''},\quad y'''_{n'''},\quad \ldots,$$

---

[1] En conséquence, puisque x^m, où m est entier et positif, admet une dérivée (n° 2), tout polynome entier en x et toute fraction rationnelle (sauf pour les racines de son dénominateur) admettent des dérivées dans tout intervalle.

où les indices n', n'', n''', ... vont en croissant, et qui correspond à une valeur x de l'intervalle (x_0, x_1). Cette suite est convergente comme correspondant à la suite convergente u', u'', u''', ..., parce que la fonction $f(x)$ est continue (Chap. III, n° 6); de plus, toutes les suites analogues que l'on formerait en prenant dans le tableau ci-dessus des termes d'indices respectivement supérieurs à n', n'', n''', ... sont convergentes et équivalentes (Chap. I, n° 15) à la suite considérée. Il résulte de là que y est bien une fonction de x; nous la représenterons par $F(x)$.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ admette une dérivée $\varphi'(x)$ dans l'intervalle (x_0, x_1) et $f(u)$ une dérivée $f'(u)$ dans l'intervalle (u_0, u_1). A un nombre x du premier intervalle correspond une suite convergente $u_1, u_2, u_3, \ldots$ comprise dans le second et dont nous désignons un terme quelconque par u; à cette même valeur x correspond une autre suite convergente $y_1, y_2, y_3, \ldots$, dont nous désignons un terme quelconque par y. Considérons des nombres $x + \Delta x$, $x + \Delta' x$, $x + \Delta'' x$, ... et désignons par $u + \Delta u$ et $y + \Delta y$, par $u + \Delta' u$ et $y + \Delta' y$, par $u + \Delta'' u$ et $y + \Delta'' y$, ... des termes de rang quelconque de chacune des deux suites qui correspondent à ces nombres. Nous avons identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et les hypothèses que nous avons faites sur l'existence des deux dérivées $\varphi'(x)$ et $f'(u)$ reviennent à admettre que les deux suites

$$\frac{\Delta u}{\Delta x},\quad \frac{\Delta' u}{\Delta' x},\quad \frac{\Delta'' u}{\Delta'' x},\quad \ldots,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta u},\quad \frac{\Delta' y}{\Delta' u},\quad \frac{\Delta'' y}{\Delta'' u},\quad \ldots$$

sont convergentes. Il en est donc de même de la suite

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \frac{\Delta' y}{\Delta' x},\quad \frac{\Delta'' y}{\Delta'' x},\quad \ldots;$$

c'est-à-dire que la fonction $y = F(x)$ admet une dérivée et que cette dérivée $F'(x)$ est le produit $f'(u)\varphi'(x)$.

V. — Fonctions uniformément différentiables.

9. *Définition.* — Une fonction $f(x)$ est dite *uniformément différentiable dans un intervalle* (a, b) si, étant donnée une fraction positive ε, aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un nombre positif α tel que, pour deux nombres quelconques x, x' appartenant à l'intervalle et différant de moins de α, le rapport

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$$

diffère de moins de ε de tous les rapports analogues qu'on peut former avec deux autres nombres quelconques pris dans le petit intervalle α auquel appartiennent x et x'.

De cette définition résulte évidemment que la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour tout nombre x compris entre a et b, et que cette dérivée $f'(x)$ jouit de la propriété suivante : quel que soit x, on peut, étant donnée une fraction positive ε aussi petite qu'on veut, déterminer un nombre α tel que, pour tout nombre x' différant de x de moins de α, on ait

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

Quand la fonction n'est pas uniformément différentiable, le nombre α, au lieu d'être constant, dépend de x ; et l'on peut, étant donnée une fraction positive η, aussi petite qu'on veut, trouver dans l'intervalle (a, b) deux nombres x, x', différant de moins de η et tels qu'on ait

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-f'(x)\right|>l,$$

l étant un nombre qu'on sait calculer quand on connaît la fonction $f(x)$.

Remarque. — Ce qui précède ne nous renseigne pas sur l'existence de fonctions satisfaisant à la définition des fonctions uniformément différentiables. Nous verrons plus tard que toutes les fonctions représentées par des séries entières et toutes celles qu'engendre l'intégration sont uniformément différentiables.

Mais, dès les paragraphes suivants, nous allons faire connaître deux exemples, particulièrement importants, de pareilles fonctions, savoir x^m et a^x.

VI. — La fonction x^m.

10. Quand m est un entier positif, cas déjà examiné, il est facile de voir que la fonction x^m est non seulement douée de dérivée (n° 2), mais *uniformément différentiable.*

Quand m est un entier négatif, la fonction jouit des mêmes propriétés, sauf pour la valeur $x = 0$.

Nous allons maintenant définir et étudier la fonction x^m, en supposant que x est un nombre positif quelconque et m une fraction $p : q$ dont les deux termes sont positifs.

A une valeur donnée x nous faisons correspondre une suite convergente $y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots$, dont les termes sont, par exemple, *les racines* $q^{\text{ièmes}}$ *arithmétiques de* x^p *à* 10^{-r} *près.* L'un quelconque de ces termes est, par définition, x^m. Il est d'ailleurs permis de substituer à cette suite toute suite qui lui serait équivalente : il est parfois utile de considérer celle qui est formée par les *puissances* $p^{\text{ièmes}}$ *des racines* $q^{\text{ièmes}}$ *de* x; on démontrerait sans peine l'équivalence de cette suite et de la première [1].

11. *La fonction* x^m *est continue.* En effet, si nous considérons une suite convergente quelconque $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, la suite

$$x_1^{\frac{p}{q}}, \quad x_2^{\frac{p}{q}}, \quad \ldots, \quad x_n^{\frac{p}{q}}, \quad \ldots$$

est, elle aussi, convergente d'après une remarque faite à propos

---

[1] Il peut arriver que l'exposant m fasse lui-même partie d'une suite convergente $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$. Alors la suite

$$x^{m_1}, \quad x^{m_2}, \quad \ldots, \quad x^{m_n}, \quad \ldots$$

formée comme nous l'avons déjà expliqué (Chap. I, n° 15) est, elle aussi, convergente, à cause de la continuité de la fonction exponentielle. On prendra pour x^m un terme quelconque de cette suite, à partir d'un rang suffisamment élevé.

de la fonction exponentielle (Chap. IV, n° 16), et ceci suffit pour prouver la continuité de la fonction considérée, à raison du théorème général (Chap. III, n° 6) qui relie la convergence des suites à la continuité des fonctions *dans* un intervalle. Cette fonction est donc continue *dans* tout intervalle dont la limite inférieure est un nombre positif.

12. *La fonction x^m est uniformément différentiable,* dans tout intervalle de cette sorte. Pour le prouver, il nous sera commode de la définir, comme il a été dit en second lieu, par les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines $q^{\text{ièmes}}$ de x.

Désignons par ξ_r l'une de ces racines $q^{\text{ièmes}}$ et formons le quotient

$$\frac{x'^m - x^m}{x' - x} = \frac{\xi_r'^p - \xi_r^p}{\xi_r'^q - \xi_r^q} = \frac{\xi_r'^{p-1} + \xi_r'^{p-2}\xi_r + \ldots + \xi_r^{p-1}}{\xi_r'^{q-1} + \xi_r'^{q-2}\xi_r + \ldots + \xi_r^{q-1}}.$$

On verra, avec un peu d'attention, qu'on peut prendre x' assez voisin de x pour que le numérateur diffère aussi peu qu'on voudra de $p\xi_r^{q-1}$ et le dénominateur de $q\xi_r^{q-1}$, de sorte que le quotient diffère lui-même aussi peu qu'on voudra de $\frac{p}{q}\xi_r^{p-q}$.

L'existence de la dérivée résulte de ce que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$ formant une suite convergente, il en est de même (Chap. IV, n° 16) des nombres

$$\frac{p}{q}\xi_1^{p-q}, \quad \frac{p}{q}\xi_2^{p-q}, \quad \ldots, \quad \frac{p}{q}\xi_r^{p-q}, \quad \ldots$$

dont l'un quelconque doit, d'après nos définitions, être représenté par

$$\frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}} = mx^{m-1}.$$

Telle est donc la dérivée cherchée. On démontrerait enfin que, étant donnés un intervalle quelconque, dont la limite inférieure est positive, et une fraction ε aussi petite qu'on voudra, il est possible de déterminer un nombre α tel que, pour deux nombres x et x' appartenant à l'intervalle considéré et différant de moins de α, on ait

$$\left| \frac{x'^m - x^m}{x' - x} - mx^{m-1} \right| < \varepsilon,$$

de sorte que la fonction x^m est uniformément différentiable dans tout intervalle dont la limite inférieure est un nombre positif.

VII. — Dérivée de la fonction exponentielle.

13. Reportons-nous aux paragraphes 13 et 14 du Chapitre IV, dont nous garderons ici les notations, et, en particulier, à l'égalité

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} + \theta \frac{\Delta}{h}.$$

Remarquons d'abord que le dernier terme du second membre ne peut donner lieu à aucune difficulté; car, nous étant donné x, lorsque nous aurons fixé la valeur de h, nous pourrons, ainsi qu'il a été expliqué à l'endroit cité, prendre s assez grand pour que $\Delta : h$ soit aussi petit que nous voudrons. Il n'y a donc plus à s'occuper de ce terme.

Nous pouvons écrire

$$a^h - 1 = \mu_s \qquad \left(h = \frac{P'}{Q}\right),$$

la valeur μ_s dépendant de l'approximation avec laquelle on calcule la racine $Q^{\text{ième}}$ de $a^{P'}$. Remarquons que, si h est fixé, quelque petit qu'il soit, μ_s ne peut pas, quelque grand que soit s, tomber au-dessous d'une certaine fraction μ, qu'on pourrait calculer.

Cela posé, considérons la fonction $\log_a z$ et remplaçons l'argument z par $1 + \mu_s$. A ce nombre $1 + \mu_s$ correspond une suite convergente $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$, telle que les nombres

$$a^{h_1}, \quad a^{h_2}, \quad \ldots, \quad a^{h_n}, \quad \ldots$$

convergent vers z. Remarquons que, si s est déterminé, la suite h_1, $h_2, \ldots$ n'a pas pour limite h, mais que h_n diffère de h par une fraction ε_s qui tend vers zéro lorsque s et n croissent simultanément d'une manière indéfinie. Posons donc

$$h_n = h - \varepsilon_s,$$

d'où l'on tire

$$h = \log_a(1 + \mu_s) + \varepsilon_s.$$

Il vient en conséquence

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{\mu_s}{\log_a(1+\mu_s) + \varepsilon_s} = \frac{1}{\log_a(1+\mu_s)^{\frac{1}{\mu_s}} + \frac{\varepsilon_s}{\mu_s}}.$$

Or, si nous faisons d'abord croître s indéfiniment, en même temps que n, nous savons que ε_s tend vers zéro, tandis que μ_s ne tombe pas au-dessous d'une certaine fraction fixe μ; par suite, le rapport $\varepsilon_s : \mu_s$ tend vers zéro.

Il suffit donc de faire voir que, lorsqu'on forme une suite h, h', h'', ... de valeurs convergeant vers zéro, la suite correspondante

$$\log_a(1+\mu_s)^{\frac{1}{\mu_s}}, \quad \log_a(1+\mu'_s)^{\frac{1}{\mu'_s}}, \quad \log_a(1+\mu''_s)^{\frac{1}{\mu''_s}}, \quad \ldots$$

est elle-même convergente. Or, nous avons prouvé (Chap. I, n° 10) que, si μ_s, μ'_s, μ''_s, ... sont les inverses d'entiers positifs qui croissent indéfiniment, la suite

$$(9) \qquad (1+\mu_s)^{\frac{1}{\mu_s}}, \quad (1+\mu'_s)^{\frac{1}{\mu'_s}}, \quad (1+\mu''_s)^{\frac{1}{\mu''_s}}$$

est convergente. Il est facile de s'assurer que cette conclusion subsiste quand les μ_s sont des fractions positives ou négatives tendant vers zéro. De cette propriété et de la continuité de la fonction logarithmique (Chap. IV, n° 17) il résulte (Chap. III, n° 6) que, si l'on désigne par e l'un quelconque des termes de la suite (9), la fonction exponentielle a^x admet une dérivée et que cette dérivée est

$$\frac{a^x}{\log_a e}.$$

14. Mais il y a plus : *la fonction exponentielle est uniformément différentiable dans tout intervalle.* Cherchons, en effet, une limite supérieure α de h et de h', telle qu'on ait

$$\left| a^x \frac{a^h - 1}{h} - a^x \frac{a^{h'} - 1}{h'} \right| < \varepsilon.$$

Il suffit évidemment de satisfaire aux deux inégalités

$$\left| \frac{a^h - 1}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{2a^x}, \qquad \left| \frac{a^{h'} - 1}{h'} \right| < \frac{\varepsilon}{2a^x},$$

X étant la limite supérieure de l'intervalle (x_0, X) auquel appartient le nombre x (si $a > 1$; dans le cas contraire, il faudrait remplacer X par la limite inférieure x_0). De ces deux inégalités qui ne sont pas distinctes, on tirera, puisque la fonction exponentielle admet une dérivée pour toute valeur x et, en particulier, pour $x = 0$, une limite supérieure α des valeurs absolues $|h|$ et $|h'|$. Cette limite α étant visiblement indépendante de la valeur x considérée, la fonction exponentielle est uniformément différentiable dans tout intervalle (x_0, X).

15. Le résultat précédent va nous permettre de calculer la dérivée de la fonction qu'on représente par le symbole e^x. En effet, quand on donne à m une valeur fixe dans l'expression

$$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x,$$

on obtient une fonction dont la dérivée est égale à cette exponentielle même, divisée par

$$\log(1+\mu)^{\frac{1}{\mu}},$$

le logarithme étant pris dans le système qui a pour base $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, et μ étant une fraction plus petite que toute fraction donnée. Quand m croît indéfiniment, l'exponentielle considérée devient la fonction qu'on représente par e^x. Il s'agit de voir quelle valeur le logarithme prend dans les mêmes conditions. Appelons-le z; ce logarithme est défini par la relation

$$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^z = (1+\mu)^{\frac{1}{\mu}};$$

le signe d'égalité indiquant ici l'équivalence de deux suites : celle qui figure au premier membre est convergente (Chap. IV, n° 16); celle qui figure au second membre est convergente (n° 13) et, de plus, équivalente à celle qui a pour terme général $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

Aussi pouvons-nous écrire

$$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^z = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Or, dans tout système de logarithmes, le logarithme de la base est égal à l'unité. Nous avons donc $z = 1$, ce qui prouve que la fonction e^x est à elle-même sa propre dérivée.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS UNIFORMÉMENT DIFFÉRENTIABLES.

Nous établissons, dans ce Chapitre, plusieurs propriétés importantes qui sont communes à toutes les fonctions uniformément différentiables, mais dont certaines n'appartiennent pas exclusivement à ces fonctions.

I. — Premières propriétés.

1. Théorème. — *Si une fonction est uniformément différentiable dans un intervalle* (a, b), *elle est continue dans cet intervalle, ainsi que sa dérivée.*

Nous démontrerons d'abord la continuité de la dérivée. D'après la définition même des fonctions uniformément différentiables (Chap. V, n° 9), on peut, se donnant ε, satisfaire à l'inégalité

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

et en même temps à celle-ci

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x')\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

de leur rapprochement résulte

$$|f'(x')-f'(x)|<\varepsilon.$$

Pour établir la continuité de la fonction $f(x)$ elle-même, partons de l'inégalité qui traduit la définition et écrivons-la de la manière suivante

$$f(x')-f(x)=(x'-x)[f'(x)+\theta\varepsilon] \qquad (-1<\theta<1).$$

La dérivée $f'(x)$, étant continue dans l'intervalle (a, b), est finie; il existe donc un nombre M supérieur à $f'(x) + \theta\varepsilon$, quel que soit x. Comme, d'autre part, $x' - x$ est en valeur absolue moindre que α, il vient

$$|f(x') - f(x)| < M\alpha.$$

Or α est indépendant de x; il est arbitraire et aussi petit qu'on veut. Donc $f(x)$ est continue *dans* l'intervalle (a, b).

Remarque. — Les principales des fonctions douées de dérivée que nous avons rencontrées jusqu'ici se trouvant être uniformément différentiables, il est bon de citer un exemple de fonction qui admette une dérivée sans être uniformément différentiable. Le suivant est d'autant plus intéressant que la dérivée est finie. Anticipant sur des connaissances que nous acquerrons par la suite, considérons la fonction

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad [f(0) = 0],$$

qui admet, pour toute valeur x *autre que zéro,* une dérivée

$$f'(x) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}.$$

Cette formule étant inapplicable pour $x = 0$, il faut, pour cette valeur, se reporter à la définition de la dérivée. Le rapport

$$\frac{k}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = h\sin\frac{1}{h}$$

est le terme général d'une suite

$$h\sin\frac{1}{h}, \quad h'\sin\frac{1}{h'}, \quad h''\sin\frac{1}{h''}, \quad \ldots,$$

qui converge vers zéro. Donc, pour $x = 0$, la fonction $f(x)$ admet une dérivée dont la valeur est zéro. Ainsi, dans tout intervalle, la dérivée est déterminée et finie; mais elle est discontinue, si cet intervalle comprend la valeur $x = 0$. En effet, pour $x = 0$, la dérivée $f'(x)$ est nulle. Or, on peut choisir une valeur x aussi voisine qu'on veut de zéro, pour laquelle $f'(x)$ sera aussi voisin

qu'on voudra de tout nombre inférieur à 1, par exemple de 1 : 2. Donc $f'(x)$ est discontinue et par suite $f(x)$ *n'est pas uniformément différentiable dans tout intervalle comprenant la valeur* $x = 0$.

La fonction plus générale

$$\varphi(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}, \qquad [\varphi(0) = 0],$$

où α est une fraction à dénominateur impair, comprise entre 1 et 2, n'est pas uniformément différentiable dans tout intervalle comprenant la valeur $x = 0$ parce que, dans cet intervalle, sa dérivée devient infiniment grande sans cesser d'être déterminée. En effet, pour toute valeur x autre que zéro, on a

$$\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}.$$

On voit que x peut être pris assez petit pour que cette dérivée dépasse tout nombre donné A. Elle est d'ailleurs parfaitement déterminée pour cette valeur x, supposée différente de zéro.

Reste à chercher la valeur de la dérivée pour $x = 0$. La formule précédente n'est pas applicable parce que les symboles qui y figurent n'ont pas de sens pour $x = 0$ et que, d'ailleurs, il était impossible de différentier pour cette valeur la fonction proposée dont la représentation n'existe plus quand on fait $x = 0$. Mais, la fonction $\varphi(x)$ étant supposée nulle pour $x = 0$, sa dérivée, pour cette valeur, sera, par définition,

$$\frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = h^{\alpha-1} \sin \frac{1}{h},$$

c'est-à-dire zéro, puisque α est plus grand que l'unité.

2. Voici une conséquence importante du théorème précédent : *Toute fonction uniformément différentiable est rectifiable* (*voir* Chap. III, n° 13). Soit y une fonction de x, que l'on suppose uniformément différentiable dans un intervalle (x_0, X). On peut alors, se donnant un nombre positif ε, aussi petit qu'on

veut, assigner un nombre α, tel que sous la seule condition

$$|x_{r+1} - x_r| < \alpha,$$

imposée à deux nombres x_{r+1} et x_r appartenant à l'intervalle (x_0, X), on ait

$$|(y_{r+1} - y_r) - (x_{r+1} - x_r) f'(x_r)| < \varepsilon |x_{r+1} - x_r|.$$

Ceci permet d'écrire

$$c_r = \sqrt{(y_{r+1} - y_r)^2 + (x_{r+1} - x_r)^2} = (x_{r+1} - x_r)\sqrt{1 + [f'(x_r) + \varepsilon\theta]^2}.$$
$$(-1 < \theta < 1).$$

Comme $f'(x)$ est finie, on verra aisément qu'on peut remplacer cette équation par la suivante

$$c_r = (x_{r+1} - x_r)\sqrt{1 + f'^2(x_r)} + (x_{r+1} - x_r)\varepsilon\lambda_r,$$

λ_r étant, quels que soient x_r et x_{r+1}, inférieur à un certain nombre A. On aura donc

$$\Sigma c_r = \Sigma(x_{r+1} - x_r)\sqrt{1 + f'^2(x_r)} + \varepsilon\Sigma\lambda_r(x_{r+1} - x_r).$$

Mais la seconde somme est en valeur absolue inférieure à

$$A\Sigma(x_{r-1} - x_r) = A(X - x_0).$$

Si donc on prend ε suffisamment petit pour que, dans le calcul particulier qu'on a à effectuer, on doive négliger $\varepsilon A(X - x_0)$, la somme considérée se réduira à

$$\Sigma(x_{r+1} - x_r)\sqrt{1 + f'^2(x_r)},$$

Mais $f(x)$ étant uniformément différentiable, sa dérivée et par suite $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ sont continues, donc intégrables (Chap. III, n° 5). La somme considérée est donc indépendante du mode de subdivision adopté pour l'intervalle (x_0, X) : c'est-à-dire que la fonction y est *rectifiable,* comme nous l'avions annoncé.

3. Théorème fondamental. — *Si une fonction $f(x)$, uniformément différentiable dans l'intervalle (a, b), est nulle pour a et pour b, sa dérivée s'annule dans l'intervalle.*

Il faut entendre par là qu'on peut déterminer une suite conver-

gente $x_1, x_2, \ldots$, de nombres compris entre a et b et tels que la suite $f'(x_1), f'(x_2), \ldots$ ait pour limite zéro, cette suite étant formée comme nous l'avons expliqué précédemment (Chap. I, n° 15); de sorte que toute suite composée de termes pris plus loin que ceux-ci dans chacune des suites qui définissent respectivement $f'(x_1), f'(x_2), \ldots$ aura, elle aussi, pour limite zéro. A raison de la continuité de $f'(x)$, toute suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ équivalente à $x_1, x_2, \ldots$ jouira de la même propriété.

Le théorème est évident si la fonction $f(x)$ est constamment nulle entre a et b. Sinon $f(x)$, étant finie puisqu'elle est continue dans l'intervalle (a, b), admet une limite supérieure et une limite inférieure, dont l'une au moins est différente de zéro. Supposons que ce soit la limite supérieure, et de plus que la fonction n'atteigne pas cette limite (c'est le cas général). Nous avons vu (Chap. II, n° 8) qu'alors on peut créer dans l'intervalle (a, b) une série d'intervalles (a_r, b_r), tendant vers zéro, compris chacun dans le précédent et comprenant chacun un nombre x_r pour lequel la fonction acquiert une valeur supérieure à celles qu'elle a pour les deux limites a_r et b_r de cet intervalle partiel; en outre, la suite des nombres x_r est convergente. Cela étant, formons les deux suites

$$\frac{f(a_1)-f(x_1)}{a_1-x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{f(a_n)-f(x_n)}{a_n-x_n}, \quad \ldots,$$
$$\frac{f(b_1)-f(x_1)}{b_1-x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{f(b_n)-f(x_n)}{b_n-x_n}, \quad \ldots,$$

où les a_r sont les limites inférieures et les b_r les limites supérieures des intervalles partiels. La première est composée de termes *tous positifs*, la seconde de termes *tous négatifs*.

Pour n suffisamment grand, la différence $b_n - a_n$ est plus petite que le nombre α qui figure dans la définition des fonctions uniformément différentiables; comme $f(x)$ est une de ces fonctions, chacun des deux rapports

$$\frac{f(a_n)-f(x_n)}{a_n-x_n}, \quad \frac{f(b_n)-f(x_n)}{b_n-x_n}$$

diffère de $f'(x_n)$ de moins d'une fraction positive ε_n aussi petite qu'on veut. Nous pouvons donc mettre les termes des deux suites

considérées sous les formes suivantes

$$f'(x_1)+\theta_1\varepsilon_1,\quad f'(x_2)+\theta_2\varepsilon_2,\quad \ldots,\quad f'(x_n)+\theta_n\varepsilon_n,\quad \ldots,$$
$$f'(x_1)+\theta'_1\varepsilon_1,\quad f'(x_2)+\theta'_2\varepsilon_2,\quad \ldots,\quad f'(x_n)+\theta'_n\varepsilon_n,\quad \ldots,$$

les ε étant des nombres positifs qui tendent vers zéro, les θ des fractions comprises entre -1 et $+1$. Dès lors, on voit que les deux suites sont équivalentes entre elles et équivalentes à la suite

$$f'(x_1),\quad f'(x_2),\quad \ldots,\quad f'(x_n),\quad \ldots.$$

L'une ayant tous ses termes positifs et l'autre tous ses termes négatifs, elles ont nécessairement pour limite zéro, ainsi que la dernière, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas particulier où la fonction atteint sa limite supérieure pour une valeur x_0, il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème que nous avons rappelé. On introduira d'emblée les deux suites considérées, où les a_r seront des nombres croissants tendant vers x_0, les b_r des nombres décroissants tendant vers x_0, et les x_r des nombres respectivement compris entre a_r et b_r; ils tendront aussi par conséquent vers x_0 et la dérivée $f'(x)$ sera *nulle* pour x_0 au sens que nous donnons à ce mot.

4. *Remarque I.* — Le théorème peut être vrai de certaines fonctions qui ne jouiraient pas de la propriété d'être uniformément différentiables; mais notre démonstration suppose expressément cette propriété. Si $f(x)$, en effet, n'était pas uniformément différentiable, on pourrait, dans l'intervalle (a, b), trouver deux nombres x et x', aussi voisins qu'on voudrait et tels que

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$$

eût avec $f'(x)$ une différence supérieure à un nombre assignable. Or, si ces couples de nombres x et x' se trouvaient être ceux que nous désignons par a_n et x_n, la démonstration tomberait visiblement en défaut.

Remarque II. — Pour appliquer le théorème précédent ou en poursuivre les conséquences, il faut bien remarquer que la suite x_1, x_2, ... de l'énoncé n'a certainement pour limite, ni a,

ni b. Nous avons vu, en effet (Chap. II, n° 6), que la limite supérieure M est l'un quelconque des termes M_1, M_2, ... d'une suite convergente, et les nombres x_1, x_2, ... sont précisément tels que

$$\begin{array}{lll} f(x_1) < M_1, & f(x_2) < M_2, & \ldots, \\ f(x_1) > M_1 - \varepsilon_1, & f(x_2) > M_2 - \varepsilon_2, & \ldots, \end{array}$$

la suite ε_1, ε_2, ... convergeant vers zéro. Mais si x_1, x_2, ... avaient pour limite a, par exemple, ou formaient une suite équivalente à a_1, a_2, ... dans le cas où l'intervalle (a, b) serait irrationnel, les nombres $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ..., formeraient, à cause de la continuité de $f(x)$, une suite tendant vers zéro, puisque $f(a)$ est nul par hypothèse. Il en serait donc de même de M_1, M_2, ..., ce qui est impossible, puisque la fonction n'est pas supposée constamment nulle entre a et b.

Remarque III. — La somme, le produit, le quotient de deux fonctions uniformément différentiables sont des fonctions de même nature; toutefois, dans le dernier cas, il faut supposer que le dénominateur n'a pas de racine dans l'intervalle considéré.

II. — Propositions relatives à la variation des fonctions uniformément différentiables.

5. Théorème des accroissements finis. — *Étant donnés une fonction $f(x)$, uniformément différentiable dans l'intervalle (a, b), et deux nombres x, x', appartenant à cet intervalle, on a*

$$f(x') - f(x) = (x' - x)[f'(\xi_r) + \varepsilon_r],$$

ξ étant l'un quelconque des termes d'une suite convergente, tous compris dans l'intervalle (x, x') et ε_r étant une fraction qui tend vers zéro quand r augmente.

Proposons-nous, en effet, d'exprimer la différence $f(x') - f(x)$, que nous écrirons

$$f(x') - f(x) = (x' - x)A,$$

A étant un nombre à déterminer. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(z) = f(z) - f(x) - (z - x)A.$$

Cette fonction de z, uniformément différentiable dans l'intervalle (a, b), comme étant la somme de deux fonctions telles, s'annule pour $z = x$ et pour $z = x'$. Sa dérivée

$$\varphi'(z) = f'(z) - A$$

s'annule donc entre x et x'; c'est-à-dire qu'on peut déterminer une suite convergente de nombres ξ_r, appartenant tous à l'intervalle (x, x') et tels que les différences $A - f'(\xi_r)$ tendent vers zéro quand r augmente. On peut donc poser

$$A = f'(\xi_r) + \varepsilon_r,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque I. — Les nombres ε_r ne tendent ni vers x, ni vers x', en vertu d'une remarque antérieure (n° 4).

Remarque II. — Le théorème des accroissements finis s'applique à des fonctions autres que les fonctions uniformément différentiables. Il s'appliquerait, par exemple, à la fontion $x^2 \sin \frac{1}{x}$, dont la dérivée est finie, mais discontinue (n° 1) et même à des fonctions telles que $x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, α étant une fraction comprise entre 1 et 2, à dénominateur impair, bien que la dérivée de cette fonction devienne aussi grande qu'on veut (n° 1) aux environs de $x = 0$.

6. Conséquence. — *Une fonction, uniformément différentiable dans un intervalle (a, b) et dont la dérivée est nulle pour tout nombre x compris entre a et b, est constante dans cet intervalle.*

En effet, soient x et x' deux nombres quelconques de l'intervalle (a, b), et ξ_r un nombre compris entre x et x'. Par hypothèse, $f'(\xi_r)$ est nul. On a donc

$$f(x') - f(x) = (x' - x)\varepsilon_r$$

en vertu du théorème des accroissements finis.

Si $f(x)$ n'était pas constant, on pourrait déterminer les deux nombres x et x' de façon que $f(x') - f(x)$ fût en valeur absolue

supérieure à un certain nombre l qu'on pourrait calculer. On en conclurait

$$\varepsilon_r > \frac{l}{|x'-x|},$$

ce qui est absurde, car l'indice r peut être pris assez grand pour que ε_r tombe au-dessous de toute fraction donnée et, en particulier, de la précédente.

Nous avons déjà fait observer et prouvé par des exemples que le présent énoncé n'est pas vrai, si la fonction $f(x)$ n'est pas uniformément différentiable (Chap. V, n° 6).

7. *Variation des fonctions uniformément différentiables.* — Une telle fonction est croissante *dans* un intervalle (a, b) si sa dérivée n'est jamais négative entre a et b et si, de plus, il n'existe dans cet intervalle aucun intervalle où cette dérivée soit constamment nulle.

Trois cas peuvent se présenter : 1° ou bien la dérivée est constamment positive dans l'intervalle (a, b); 2° ou bien elle est positive pour toutes les valeurs x comprises entre a et b, sauf pour un certain nombre d'entre elles; 3° ou bien il existe une ou plusieurs suites convergentes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, comprises dans l'intervalle (a, b) et telles que les nombres

$$f'(a_1), \quad f'(a_2), \quad \ldots, \quad f'(a_n), \quad \ldots$$

tendent vers zéro.

Nous ne traiterons que ce dernier cas, qui est le plus général.

Pour montrer que la fonction $f(x)$ est croissante dans un intervalle (x', x) qui comprend un seul des termes de la suite ci-dessus, a_n par exemple $(x' < a_n < x)$, il suffira de prouver l'inégalité $f(x) - f(a_n) > 0$, car on démontrerait de même l'inégalité $f(a_n) - f(x') > 0$ qui, rapprochée de la précédente, entraîne la conclusion annoncée. Or on a

$$f(x) - f(a_n) = (x - a_n)[f'(\xi_r) + \varepsilon_r],$$

et l'on sait que la suite convergente dont ξ_r fait partie ne tend pas vers a_n; par suite $f'(\xi_r)$, ne pouvant être ni négative, ni nulle, est positive. On peut alors assigner à l'indice r une valeur assez

grande pour que ε_r soit en valeur absolue moindre que $f'(\xi_r)$; de sorte que l'on a bien

$$f(x) - f(a_n) > 0.$$

La réciproque de la proposition que nous venons d'établir est exacte et se démontre facilement.

8. *Maxima et minima.* — On dit qu'une fonction $f(x)$ passe par un *maximum* dans l'intervalle (a, b) si l'on peut déterminer deux autres intervalles (x_1, α), (α, x_2) contigus, compris dans le premier $(x_1 < \alpha < x_2)$ et tels que la fonction soit croissante dans l'intervalle (x_1, α) et décroissante dans l'intervalle (α, x_2). On définit le *minimum* d'une manière analogue.

Si les deux intervalles sont rationnels, α est un nombre bien déterminé et $f(\alpha)$ est plus grand que toutes les valeurs de f pour x compris, soit entre x_1 et α, soit entre α et x_2. Mais, en général, il n'en est pas ainsi, et il est impossible de calculer une valeur α pour laquelle $f(x)$ soit supérieur aux valeurs voisines. Rappelons qu'alors l'extrémité α du premier intervalle (x, α) est l'un quelconque, à partir d'un rang suffisamment éloigné, des termes tous croissants d'une suite convergente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$; l'origine α du second intervalle est l'un des termes, tous décroissants, d'une suite $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, \ldots$ équivalente à la première.

Quand la fonction $f(x)$ est uniformément différentiable, le théorème précédent (n° 7) donne la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction passe par un maximum dans l'intervalle (a, b). Il faut et il suffit qu'on puisse déterminer dans celui-ci deux intervalles contigus (x_1, α), (α, x_2) tels que la dérivée $f'(x)$ ne soit jamais négative dans le premier, jamais négative dans le second, et ne soit constamment nulle ni dans l'un, ni dans l'autre.

Remarquons que la suite

$$f'(\alpha_1), \quad f'(\alpha_2) \quad \ldots, \quad f'(\alpha_n), \quad \ldots,$$

ainsi que toute suite équivalente, doit converger vers zéro. Car, s'il n'en était pas ainsi, elle serait composée de termes tous positifs, tandis que la suite

$$f'(\alpha'_1), \quad f'(\alpha'_2), \quad \ldots, \quad f'(\alpha'_n), \quad \ldots$$

a ses termes soit nuls, soit négatifs. Or, à cause de la continuité de la dérivée (n° 1), ces deux suites sont équivalentes, parce que les deux suites formées par les α et les α' le sont (Chap. III, n° 6). Elles doivent donc tendre l'une et l'autre vers zéro.

III. — Dérivée des fonctions inverses.

9. Nous avons défini (Chap. IV, n° 5) la fonction inverse $x = \varphi(y)$ d'une fonction $y = f(x)$ continue et croissante *dans* un intervalle (a, b).

Nous avons prouvé l'existence de cette fonction inverse dans l'intervalle correspondant

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(b);$$

c'est-à-dire que nous avons appris à former une suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qui, dans l'intervalle (a, b), correspond à un nombre y, arbitrairement donné entre y_0 et y_1, suite telle que l'on ait

$$|y - f(x_n)| < \varepsilon_n,$$

ε_n étant une fraction donnée, aussi petite qu'on voudra, si l'indice n est choisi suffisamment grand. Nous allons montrer que *la fraction ε_n ne dépend pas de y.*

Pour cela, rappelons comment nous avons obtenu la suite x_1 $x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Nous avons formé une suite d'intervalles (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ dont chacun est la moitié du précédent. Les divers termes $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sont des nombres quelconques, compris respectivement dans ces intervalles. Or chacun de ces intervalles est tel que y tombe entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$, car nous les avons formés de façon qu'il en soit ainsi. Par conséquent, comme $f(a)$ est une fonction croissante, nous avons

$$|y - f(x_n)| < f(b_n) - f(a_n).$$

Mais, la fonction $f(a)$ étant continue *dans* l'intervalle (a, b), on peut, se donnant à l'avance une fraction ε_n, déterminer un nombre α tel que, sous la seule condition

$$|b_n - a_n| < \alpha,$$

on ait l'inégalité

$$f(b_n) - f(a_n) < \varepsilon_n;$$

celle-ci, à son tour, entraîne

$$|y - f(x_n)| < \varepsilon_n,$$

la fraction ε_n étant indépendante de y, puisqu'on se l'est donnée arbitrairement.

10. Ce point important étant acquis, nous ferons une hypothèse de plus sur la fonction $f(x)$; nous supposerons non seulement qu'elle est continue et croissante *dans* l'intervalle (a, b), mais qu'elle est *uniformément différentiable dans cet intervalle.*

Sous le bénéfice de ces hypothèses, nous allons montrer que, si la dérivée de $f(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b), *la dérivée* $\varphi'(y)$ *de la fonction inverse diffère aussi peu qu'on veut de*

$$\frac{1}{f'(x_n)}$$

lorsque l'indice n est suffisamment grand; la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ étant toujours celle que nous avons fait correspondre au nombre y, choisi d'une manière quelconque entre y_0 et y_1.

Donnons, en effet, au nombre considéré y un accroissement Δy, qui devra être *tout à fait arbitraire,* pour qu'on puisse parler de la dérivée de la fonction inverse $x = \varphi(y)$. Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$y = f(x_n) + \theta\varepsilon_n,$$
$$y + \Delta y = f(x_n + \Delta x_n) + \theta'\varepsilon_n,$$

ε_n représentant la *même fraction* dans les deux égalités, où θ et θ' sont des nombres compris entre -1 et $+1$. Retranchant ces deux égalités membre à membre et divisant par Δy, on trouve

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta y}\,\frac{f(x_n + \Delta x_n) - f(x_n)}{\Delta x_n} = 1 - (\theta' - \theta)\frac{\varepsilon_n}{\Delta y}.$$

Bien que l'on ne connaisse pas encore le nombre x_n, on peut, parce que la fonction $f(x)$ est uniformément différentiable, se donner un nombre ε aussi petit qu'on veut et en déterminer un

autre α, tel que, sous la condition

$$|\Delta x_n| < \alpha,$$

le rapport

$$\frac{f(x_n + \Delta x_n) - f(x_n)}{\Delta x_n}$$

diffère de $f'(x_n)$ de moins de ε et qu'on ait, en conséquence,

$$\frac{f(x_n + \Delta x_n) - f(x_n)}{\Delta x_n} = f'(x_n) + \theta_1 \varepsilon \qquad (-1 < \theta_1 < 1).$$

D'autre part, nous avons montré (Chap. IV, n° 5) que la fonction inverse $\varphi(y)$ est elle-même continue *dans* l'intervalle (y_0, y_1); nous pourrons donc prendre Δy assez petit pour que Δx_n soit en valeur absolue moindre que α : il suffit pour cela que Δy, tout en restant arbitraire, soit inférieur en valeur absolue à un certain nombre qu'on peut calculer.

Cela posé et Δy étant fixé, nous pouvons, dans la suite x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qui est déterminée par la valeur considérée y, prendre l'indice n assez grand pour que ε_n soit inférieur en valeur absolue au produit $\varepsilon \Delta y$: cette condition fixe, sinon le terme x_n lui-même, du moins une limite inférieure du rang de ce terme. On a alors

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta y} = \frac{1 + 2\theta_2 \varepsilon}{f'(x_n) + \theta_1 \varepsilon} \qquad (-1 < \theta_2 < 1).$$

Nous déterminerons une limite supérieure de la fraction ε, qui est restée jusqu'ici complètement arbitraire, en exprimant que la différence entre le rapport qui figure au second membre et l'inverse de $f'(x_n)$ est moindre qu'une fraction η_n que nous nous donnerons et qui devra tendre vers zéro quand n augmentera indéfiniment. Pour résoudre l'inégalité qu'on obtient ainsi, remarquons que $f'(x)$ ne s'annulant point, par hypothèse, dans l'intervalle (a, b), sa valeur absolue a une limite inférieure m, différente de zéro. D'autre part, cette valeur absolue a, dans le même intervalle, une limite supérieure M, parce que, $f(x)$ étant uniformément différentiable, sa dérivée $f'(x)$ reste finie. En introduisant les deux limites m et M, on trouve aisément qu'il suffit de prendre

$$\varepsilon < \frac{2m^2}{3M + 1} \eta_n.$$

Nous arrivons ainsi à l'égalité

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_n)} + \theta_3 \eta_n \qquad (-1 < \theta_3 < 1)$$

qui prouve notre théorème.

On voit que, de quelque manière que l'on fasse tendre vers zéro les accroissements $\Delta y, \Delta y', \ldots$, les accroissements correspondants $\Delta x_n, \Delta x_{n'}, \ldots$ donneront lieu à une suite

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta y}, \quad \frac{\Delta x_{n'}}{\Delta y'}, \quad \ldots$$

équivalente à la suite

$$\frac{1}{f'(x_n)}, \quad \frac{1}{f'(x_{n'})}, \quad \ldots$$

qui est convergente, $f'(x)$ étant finie et continue comme dérivée d'une fonction uniformément différentiable. On énonce ce résultat en disant que, si une fonction $f(x)$ est continue, croissante (ou décroissante) et uniformément différentiable dans un intervalle (a, b), sa fonction inverse $\varphi(y)$ admet une dérivée pour toutes les valeurs y comprises dans l'intervalle correspondant, et que cette dérivée $\varphi'(y)$ est l'inverse de $f'(x)$, x étant la valeur de $\varphi(y)$ pour la valeur y considérée.

11. *Dérivée du logarithme.* — La fonction a^x étant continue, croissante (ou décroissante) et uniformément différentiable dans tout intervalle, nous pouvons appliquer à $\log_a y$ la règle qui vient d'être établie pour la dérivée d'une fonction inverse. Étant donné y, nous avons

$$a^{x_r} + \varepsilon_r = y$$

et aussi

$$\frac{d \log_a y}{dy} = \frac{1}{\frac{da^{x_r}}{dx_r}} + \varepsilon'_r = \frac{1}{a^{x_r} \log_a e} + \varepsilon'_r,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\frac{d \log_a y}{dy} = \frac{1}{(y - \varepsilon_r) \log_a e} + \varepsilon'_r = \frac{1}{y \log_a e} + \eta_r.$$

Ainsi, au nombre donné y correspond une suite convergente $x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots$, dont un terme quelconque est par définition

$\log_a y$. Il lui correspond aussi une autre suite, également convergente,

$$\frac{1}{y_1 \log_a e} + \eta_1, \quad \frac{1}{y_2 \log_a e} + \eta_2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{y_r \log_a e} + \eta_r, \quad \ldots.$$

dont chaque terme peut être calculé lorsque son rang est donné. La fraction η_r tendant vers zéro lorsque r augmente indéfiniment, l'un quelconque des termes de cette suite est la dérivée par rapport à y de la fonction $\log_a y$. C'est ce qu'on énonce en disant que

$$\frac{1}{y \log_a e}$$

est la dérivée de la fonction $\log_a y$.

IV. — Formules de Taylor et de Maclaurin.

12. Une fonction $f(x)$ est supposée, dans un intervalle (x_0, X), uniformément différentiable et douée de n dérivées successives, dont les $n-1$ premières soient uniformément différentiables et la dernière seulement finie. Deux nombres, a et x, étant donnés dans cet intervalle, l'objet de la formule de Taylor est d'exprimer la différence entre $f(x)$ et le polynome

$$f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Représentons cette différence par $A(x-a)^p$, p étant un entier quelconque; il s'agit de déterminer A. Nous construirons, à cet effet, la fonction

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{x-z}{1} f'(z) - \ldots$$
$$- \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z) - A(x-z)^p.$$

Cette fonction s'annule pour $z = a$ et pour $z = x$. Or, z^m étant une fonction uniformément différentiable (Chap. V, n° 11), la fonction $\varphi(z)$ jouit de la même propriété, en vertu de nos hypothèses. Sa dérivée

$$\varphi'(z) = pA(x-z)^{p-1} - \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z)$$

doit donc s'annuler (n° 3) entre $z = a$ et $z = x$. Cela veut dire qu'on peut déterminer une suite convergente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots$, comprise entre a et x et une autre suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, convergeant vers zéro, telle que l'on ait

$$\varphi'(\xi_r) = \varepsilon_r.$$

On conclut de là

$$A = \frac{(x-\xi_r)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\xi_r) + \frac{\varepsilon_r}{p(x-\xi_r)^{p-1}}.$$

Le dernier terme du second membre tend vers zéro, comme ε_r, quand r augmente indéfiniment; car la suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ n'ayant pour limite ni a, ni x, le dénominateur de ce terme dépasse toujours en valeur absolue un nombre que l'on peut assigner.

Si, dans la formule de Taylor, on fait $a = 0$, on obtient la formule dite *de Maclaurin,*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$$
$$+ \frac{x^{n-p}(1-\theta_r)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\theta_r x) + \frac{\varepsilon_r}{p x^{p-1}(1-\theta_r)^{p-1}},$$
$$0 < \theta < 1,$$

qui sert au développement des fonctions en série entière (*voir* ci-après Chap. VIII).

13. *Application.* — Nous en ferons usage ici pour démontrer que *la fonction* $e^{-\frac{1}{x^2}}$ *et ses dérivées de tous les ordres sont uniformément différentiables dans tout intervalle.*

Remarquons d'abord que le symbole

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

n'a pas de sens quand x est nul. Nous conviendrons qu'il représente zéro, afin que la fonction soit continue. Pour toute valeur x autre que zéro, $f(x)$ admet une dérivée qui, d'après le théorème des fonctions de fonction, est

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Mais cette expression ne représente pas la dérivée pour $x = 0$. Formons cette dernière directement : par définition, on a

$$\frac{k}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}}.$$

Or la formule de Maclaurin appliquée à e^x montre que la suite

$$\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}}, \quad \frac{1}{h'} e^{-\frac{1}{h'^2}}, \quad \frac{1}{h''} e^{-\frac{1}{h''^2}}, \quad \ldots$$

converge vers zéro lorsque h, h', h'' tendent eux-mêmes vers zéro. La dérivée de $f(x)$ est donc nulle pour $x = 0$.

En continuant de la sorte, on reconnaîtra que toutes les dérivées sont des sommes de termes de la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(m entier positif) et que la valeur de chacune d'elles, calculée directement pour $x = 0$, se réduit à zéro.

Pour prouver que la fonction et toutes ces dérivées sont uniformément différentiables, il suffit de prouver que cette propriété appartient à la fonction φ, quelle que soit la valeur de l'entier positif m ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Formons, à cet effet, le rapport $k:h$, que nous désignerons par $\varphi(x, h)$,

$$\varphi(x, h) = \frac{1}{h}[\varphi(x+h) - \varphi(x)] = \frac{1}{h}\left[\frac{e^{-\frac{1}{(x+h)^2}}}{(x+h)^m} - \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}\right].$$

En posant $h = zx$, nous l'écrirons

$$\psi(x, z) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{z x^{m+1}}\left[(1+z)^{-m} e^{\frac{1}{x^2}[1-(1+z)^{-2}]} - 1\right].$$

Étudions d'abord $\varphi(x, z)$ pour les valeurs de x *supérieures* à un certain nombre *positif* x_0, que nous déterminerons ultérieurement. Posons

$$\frac{1}{x^2}[1 - (1+z)^{-2}] = u.$$

La formule de Maclaurin donnant

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} e^{\theta u} \qquad (0 < \theta < 1),$$

nous aurons

$$e^u = 1 + \frac{1 - (1+z)^{-2}}{x^2} + \frac{[1 - (1+z)^{-2}]^2}{2x^4} e^{\theta u}.$$

Appliquant deux fois encore la formule de Maclaurin, on peut écrire

$$(1+z)^{-2} = 1 - 2z + \frac{3z^2}{(1+\zeta)^4} \qquad (0 < \zeta < z),$$

$$(1+z)^{-2} = 1 - \frac{2z}{(1+\zeta')^3} \qquad (0 < \zeta' < z).$$

Substituons le premier de ces développements dans le second terme de e^u et le second dans le dernier terme de ce même développement; il vient

$$e^u = 1 + \frac{1}{x^2}\left[2z - \frac{3z^2}{(1+\zeta)^4}\right] + \frac{2z^2 e^{\theta u}}{x^4(1+\zeta')^6}.$$

On a, d'autre part,

$$(1+z)^{-m} = 1 - mz + \frac{m(m+1)z^2}{2(1+\zeta'')^{m+2}};$$

d'où finalement

$$\psi(x, z) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{m+1}}\left(\frac{2}{x^2} - m\right) + R = \varphi'(x) + R,$$

en posant

$$\begin{aligned} R = \frac{z e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{m+1}} \Bigg\{ & -\frac{2m}{x^2} - \frac{3}{x^2(1+\zeta)^4} + \frac{m(m+1)}{2(1+\zeta'')^{m+2}} - \frac{2m e^{\theta u}}{x^4(1+\zeta')^6} \\ & + z\left[\frac{3m}{x^2(1+\zeta)^4} + \frac{m(m+1)}{x^2(1+\zeta')^{m+2}} - \frac{2m e^{\theta u}}{x^4(1+\zeta')^6}\right] \\ & + z^2\left[\frac{-3m(m+1)}{2x^2(1+\zeta)^4(1+\zeta'')^{m+2}} + \frac{m(m+1)e^{\theta u}}{x^4(1+\zeta')^6(1+\zeta'')^{m+2}}\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

On veut que $|R|$ soit moindre que toute fraction donnée ε. D'abord le facteur positif $x^{-m-1} e^{-\frac{1}{x^2}}$ a un maximum; car sa dérivée est positive pour toutes les valeurs inférieures à la racine

positive de l'équation

$$x^{-m-2}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^2}-m-1\right)=0,$$

et négative pour toutes les valeurs supérieures. On peut donc écrire

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{m+1}}<\left(\frac{2}{m+1}\right)^{-\frac{m+1}{2}}e^{\frac{-2}{m+1}}.$$

Quant à z, nous supposerons

$$|z|<q,$$

q étant un nombre inférieur à l'unité, que nous nous donnons.

Nous allons majorer la valeur absolue du trinome du second degré en z qui figure dans l'expression de R. A cet effet, changeons les signes — en signes + et remplaçons z par q. Dans les binomes $1+\zeta$, $1+\zeta'$ et $1+\zeta''$, qui figurent au dénominateur de certains termes, ζ, ζ', ζ'' sont en valeur absolue moindres que z, et par conséquent moindres que q; nous majorerons donc les termes correspondants en remplaçant ces trois binomes par $1-q$. Nous majorerons encore en remplaçant x, qui ne figure qu'en dénominateur, par le nombre plus petit x_0. Majorons enfin le facteur $e^{\theta u}$: on a visiblement

$$e^{\theta u}<e^{|u|}<e^{\frac{1}{x^2}\left[1+\frac{1}{(1-|z|)^2}\right]}<e^{\frac{1}{x_0^2}\left[1+\frac{1}{(1-q)^2}\right]}.$$

Toutes ces majorations changent le trinome considéré en une expression essentiellement positive (et non nulle) que nous désignerons par $\chi(x_0)$. Nous aurons ainsi

$$|R|<\left(\frac{2}{m+1}\right)^{-\frac{m+1}{2}}e^{\frac{-2}{m+1}}|z|\chi(x_0).$$

Si l'on observe que

$$|z|=|hx|>|h|x_0,$$

on verra que, pour rendre $|R|$ moindre que ε, il suffit de prendre

$$(1)\qquad |h|<\frac{\varepsilon}{x_0}\chi(x_0)\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{2}}e^{\frac{2}{m+1}}.$$

La valeur du second membre ne dépendant pas de x, on voit que $f(x)$ *est uniformément différentiable dans tout l'intervalle* $(x_0, +\infty)$. On montrerait de même qu'il en est encore ainsi entre $-x_0$ et $-\infty$.

Il nous reste à fixer le nombre x_0 et à étudier $\varphi(x, h)$ dans l'intervalle $(-x_0, x_0)$. Remarquons d'abord que la dérivée $\varphi'(x)$ est nulle pour $x = 0$ et que, en vertu de son expression

$$\varphi'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{m+3}}(2 - mx^2),$$

cette dérivée s'annule pour les deux racines de l'équation

$$mx^2 - 2 = 0.$$

Entre zéro et la racine positive, elle est positive. Entre zéro et la racine négative, elle est positive si m est impair, négative si m est pair. Donc, quand x croît à partir de zéro, $\varphi'(x)$ est *positive et croissante* jusqu'à une valeur X, à laquelle nous supposerons inférieur le nombre x_0, considéré plus haut. Pour x compris entre $-$X et zéro, $\varphi'(x)$ est *positive et décroissante,* si m est impair; elle est, au contraire, *négative et croissante,* si m est pair; donc, quelle que soit la parité de m, la valeur absolue de $\varphi'(x)$ diminue quand x croît de $-$X jusqu'à zéro.

Le nombre positif x_0 a été supposé inférieur à X; nous lui imposerons, en outre, la condition de satisfaire à l'inégalité

$$(2) \qquad \varphi'(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme on a visiblement

$$\varphi'(-x) = (-1)^{m-1}\varphi'(x),$$

l'inégalité (2) entraîne

$$(2)' \qquad |\varphi'(-x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a de plus, d'après ce qui précède,

$$(2)'' \qquad |\varphi'(x)| < \varphi'(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour *toute* valeur x comprise entre $-x_0$ et x_0.

Le nombre x_0 une fois fixé, on peut, puisque $\varphi(x)$ admet une dérivée $\varphi'(x)$, déterminer un nombre positif h_0 tel que, sous la seule condition

$$|h| < h_0,$$

on ait les deux inégalités

$$(3) \qquad |\varphi(x_0, h) - \varphi'(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(4) \qquad |\varphi(-x_0, h) - \varphi'(-x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Rapprochant d'une part les inégalités (2) et (3), d'autre part les inégalités (2)′ et (4), on conclut

$$(5) \qquad |\varphi(x_0, h)| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

$$(6) \qquad |\varphi(-x_0, h)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ces deux relations ont lieu pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à h_0, *nombre qui ne dépend que de* x_0.

Je dis qu'elles subsistent quand on y remplace x_0 par *tout nombre* x compris entre $-x_0$ et x_0. Pour le prouver, *laissons* h *invariable* et prenons la dérivée de $\varphi(x, h)$ par rapport à x; nous avons

$$(6)' \qquad \frac{d\varphi(x, h)}{dx} = \frac{1}{h}[\varphi'(x+h) - \varphi'(x)].$$

Supposons d'abord x compris entre zéro et x_0. La dérivée φ' étant positive et croissante pour toute valeur x qui appartient à cet intervalle, le second membre est positif et $\varphi(x, h)$, qui est positif, augmente avec x; l'inégalité (5) entraîne donc

$$(7) \qquad |\varphi(x, h)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Soit maintenant x compris entre zéro et $-x_0$. Nous avons vu que, si m est impair, la dérivée φ' est positive et décroissante; donc le second membre de l'égalité (6)′ est négatif et $\varphi(x, h)$, qui est positif, diminue quand x augmente; l'inégalité (6) entraîne donc l'inégalité (7). Si m est pair, la dérivée φ' est négative et croissante : le second membre de l'égalité (6)′ est positif et $\varphi(x, h)$, qui est négatif, augmente avec x; sa valeur absolue diminue donc

quand x augmente, et l'inégalité (6) entraîne encore l'inégalité (7).

Il n'y a plus maintenant qu'à comparer les inégalités (2)'' et (7) pour trouver

$$(8) \qquad |\varphi(x, h) - \varphi'(x)| < \varepsilon.$$

Cette inégalité a lieu pour toute valeur x, comprise entre $-x_0$ et x_0, sous la seule condition que h soit, en valeur absolue, inférieur au nombre h_0 qui ne dépend que de x_0. Elle complète notre démonstration : il suffit, en effet, de comparer h_0 avec le second membre de l'inégalité (1), et de désigner par α le plus petit de ces deux nombres pour être en droit d'affirmer que l'inégalité (8) est vérifiée, quel que soit x, sous la seule condition $|h| < \alpha$. En conséquence, *la fonction* $x^m e^{-\frac{1}{x^2}}$ *est uniformément différentiable dans tout intervalle.*

CHAPITRE VII.

SÉRIES DE FONCTIONS.

Dans ce Chapitre, nous étudions quelques propriétés générales des séries de fonctions (continuité, différentiation) et nous traitons des séries qui représentent des fonctions continues, mais n'admettent pas de dérivée.

I. — Continuité des séries de fonctions.

1. Si l'on ajoute des fonctions continues, en nombre illimité, c'est-à-dire arbitraire et aussi grand qu'on veut, la série obtenue

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est-elle une fonction continue? Est-elle même une fonction?

Pour que cette série soit une fonction dans un intervalle (a, b), il faut d'abord qu'elle soit convergente pour tout nombre x compris entre a et b, quand on lui donne pour termes successifs

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

des nombres pris suffisamment loin dans chacune des suites convergentes qui définissent respectivement les diverses fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Nous avons expliqué plus haut (Chap. I, n° 15) ce qu'il faut entendre par là et indiqué un moyen de faire, quand c'est possible, qu'il en soit ainsi.

Si une série de fonctions est convergente dans l'intervalle (a, b), c'est que, pour tout nombre x donné entre a et b, on peut assigner un entier n tel que le reste correspondant de la série,

$$R_{n,p} = f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x),$$

soit et demeure, quand p grandit, inférieur en valeur absolue à une fraction ε aussi petite qu'on voudra.

2. Mais la convergence peut affecter deux modes opposés. Voici d'abord le plus général. Il arrive qu'*on ne peut pas, étant donné* ε, *déterminer un indice n tel qu'on ait*

$$|R_{n,p}| < \varepsilon$$

pour tout nombre x compris dans l'intervalle (a, b). Soit pour exemple la série

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \ldots + \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} + \ldots.$$

En vertu de l'identité

$$\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1},$$

la somme S_n des n premiers termes se réduit à $1 - \frac{1}{nx+1}$.

La série est donc convergente pour toute valeur x comprise entre zéro et un nombre positif quelconque b, puisque S_n tend vers l'unité [1]. Mais si l'on forme le reste

$$R_{n,p} = S_{n+p} - S_n = \frac{1}{nx+1} - \frac{1}{(n+p)x+1},$$

et qu'on prenne

$$p = 8n, \qquad x = \frac{1}{3n},$$

on voit que ce reste est égal à $\frac{1}{2}$. Ceci montre clairement que le nombre n des termes qu'il faut prendre dans une série convergente pour que le reste tombe au-dessous d'une fraction donnée ε est en général variable avec x.

Parfois, au contraire, *une série ayant pour termes des fonctions de x*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

---

[1] La série considérée est une fonction de x dans tout l'intervalle $(0, b)$, puisqu'elle est convergente pour tout nombre intermédiaire entre 0 et b, ainsi que pour 0 et b. Mais ce n'est pas une fonction *continue* de x dans tout l'intervalle, puisqu'elle est visiblement nulle pour $x = 0$ et égale à 1 pour $x > 0$.

on peut, étant donnée une fraction ε *aussi petite qu'on veut, déterminer* n *de telle sorte que le reste correspondant soit en valeur absolue inférieur à* ε, *et cela quel que soit* x *dans un intervalle* (a, b). On dit alors que la série est *uniformément convergente dans l'intervalle* (a, b). Si l'on veut évaluer une telle série avec une certaine approximation, la même quel que soit x, on n'aura qu'à prendre toujours le même nombre de termes. Cette autre manière d'énoncer la définition des séries uniformément convergentes manifeste leur importance, accrue encore par leur continuité.

3. Théorème. — *Une série, dont les termes sont des fonctions de* x *continues dans un intervalle* (a, b) *et qui est uniformément convergente dans cet intervalle, est une fonction continue dans ce même intervalle.*

Soit S_n la somme des n premiers termes de la série. Nous voulons prouver qu'étant donnée une fraction ε, aussi petite qu'on veut, on peut trouver un nombre α tel que, pour deux nombres quelconques x et x', compris entre a et b et différant de moins de α, on ait

$$|S_{n+p'}(x') - S_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

A raison de la convergence uniforme, nous pouvons choisir n de façon que le reste $R_{n,p}(x)$ soit en valeur absolue moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, quel que soit x entre a et b.

Le nombre n étant ainsi *déterminé*, $S_n(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), comme résultant de l'addition de n fonctions telles.

On peut donc satisfaire aux deux inégalités qui expriment cette propriété

$$|x' - x < |\alpha|, \qquad |S_n(x') - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le reste $R_{n,p'}(x')$ sera moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{3}$, comme $R_{n,p}(x)$. Dès lors, la différence

$$S_{n+p'}(x') - S_{n+p}(x) = [S_n(x') - S_n(x)] + R_{n+p'}(x') - R_{n\ p}(x)$$

étant exprimée par trois termes dont chacun est, en valeur absolue, moindre que $\varepsilon : 3$, la proposition est établie.

II. — Dérivées des séries.

4. La définition que nous avons donnée de la dérivée d'une fonction quelconque est immédiatement applicable à la dérivée d'une série

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots.$$

La série admet une dérivée, si la suite

$$(1) \qquad \frac{S_m(x+h) - S_n(x)}{h}, \quad \frac{S_{m'}(x+h') - S_{n'}(x)}{h'}, \quad \ldots$$

est convergente lorsque h, h', ... est une suite *arbitraire* de nombres tendant vers zéro. Les indices m, n doivent être assez grands pour que $S_m(x+h)$ diffère des sommes S_{m+1}, S_{m+2}, ... et $S_n(x)$ des sommes S_{n+1}, S_{n+2}, ... de moins de $h\varepsilon$; de même $S_{m'}$ et $S_{n'}$ doivent différer de moins de $h\varepsilon'$ des sommes qui viennent après elles, et ainsi des autres sommes qui figurent dans la suite (1), les nombres ε, ε', ... étant donnés et formant une suite qui converge vers zéro.

Si les termes $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., qui composent la série S, ne sont pas des nombres déterminés, mais font eux-mêmes partie de suites convergentes, on pourra toujours, dans chacune de ces suites, les prendre à un rang suffisamment éloigné pour que, s'ils vérifient les conditions précédentes, ces conditions restent vérifiées lorsqu'on remplacera ces termes par n'importe quels autres venant après eux dans leurs suites respectives.

Le cas le plus intéressant est celui où chacune des fonctions f_1, f_2, ... admet une dérivée. Appelons σ la série formée par ces dérivées

$$\sigma = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots.$$

Ici un fait curieux est à remarquer. Il peut arriver que la série $S(x)$ admette une dérivée, et que la série σ soit convergente, sans que σ représente la dérivée de S. Voici la raison générale de ce fait, qui pourrait sembler paradoxal. Il est bien vrai que, *si l'on*

se donne ε *et si l'on fixe* n, on peut déterminer un nombre α tel que, pour toute valeur h de module inférieur à α, on ait

$$\left|\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}-\sigma_n(x)\right|<\varepsilon.$$

Mais, *si l'on se donne* ε *et* α, il peut arriver que, pour certaines valeurs h de module inférieur à α, on ait

$$\left|\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}-\sigma_n(x)\right|>\eta,$$

η étant un nombre que l'on peut calculer, et cela *quelque grand que soit* n.

Alors la série $S(x)$ n'admet certainement pas pour dérivée $\sigma(x)$, car la suite

$$\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h},\quad \frac{S_{n'}(x+h')-S_{n'}(x)}{h'},\quad \ldots$$

n'est pas équivalente à la suite $\sigma_n(x)$, $\sigma_{n'}(x)$, ... alors même que ces deux suites sont convergentes [1].

Au contraire, si, se donnant ε, on peut déterminer un entier r et une fraction α tels que, pour *toute valeur* h de module inférieur à α, on ait

$$\left|\frac{S_{n+p}(x+h)-S_{n+p}(x)}{h}-\sigma_r(x)\right|<\varepsilon,$$

la série S admet pour dérivée la série σ, si toutefois cette dernière est convergente. L'entier p est quelconque, mais cependant assez grand pour que, h une fois choisi, S_{n+p} diffère des sommes suivantes de moins de $h\varepsilon : 2$.

En effet, si m désigne un entier supérieur à $n+p$, le quotient

$$\frac{S_m(x+h)-S_m(x)}{h}$$

différera évidemment de $\sigma_r(x)$ de moins de 2ε; dès lors la suite

$$\frac{S_m(x+h)-S_m(x)}{h},\quad \frac{S_{m'}(x+h')-S_{m'}(x)}{h'},\quad \ldots$$

---

[1] Remarquons que la suite h, h', ... n'est pas, en général, une suite *quelconque* de nombres tendant vers zéro, mais une suite *bien* déterminée de pareils nombres.

sera équivalente à la suite $\sigma_r(x)$, $\sigma_{r'}(x)$, ... Comme cette dernière est convergente, par hypothèse, la première l'est aussi; c'est-à-dire que $S(x)$ admet une dérivée, qui est précisément la série $\sigma(x)$.

5. Les éclaircissements qui précèdent vont nous faciliter la démonstration du théorème suivant, dont l'importance est grande, parce qu'il permet, dans certains cas, de démontrer qu'une série dont les termes sont des fonctions de x admet une dérivée.

THÉORÈME. — *Étant donnée une série*

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions de x, uniformément différentiables, si la série formée par les dérivées de ces termes est uniformément convergente, elle est la dérivée de la série $S(x)$.

1° Donnons-nous la fraction ε et déterminons l'entier r par la condition

$$|f'_{r+1}(x) + f'_{r+2}(x) + \ldots + f'_{r+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

quel que soit x dans l'intervalle que l'on considère; c'est possible, puisque la série

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots$$

est supposée uniformément convergente.

2° L'entier r étant fixé, nous pouvons déterminer un nombre α tel que, pour toute valeur h de module inférieur à α, la somme

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} + \ldots + \frac{f_r(x+h) - f_r(x)}{h}$$

diffère en valeur absolue de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$ de la somme

$$\sigma_r(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_r(x).$$

3° Ayant fixé h, prenons p assez grand pour que S_{n+p} diffère des sommes suivantes aussi peu qu'on voudra.

Maintenant, p étant fixé, S_{r+p} est une somme d'un nombre déterminé de fonctions uniformément différentiables. Elle est donc elle-même une fonction de cette nature; nous pouvons lui appli-

quer le théorème des accroissements finis et écrire

$$\begin{aligned} &S_{r+p}(x+h) - S_{r+p}(x) \\ &\quad = S_r(x+h) - S_r(x) + h[f'_{r+1}(\xi_i) + \ldots + f'_{r+p}(\xi_i) + \varepsilon_i]. \end{aligned}$$

Or dans la suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nous pouvons prendre ξ_i assez éloigné pour que l'on ait

$$|\varepsilon_i| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De la dernière égalité et de toutes les explications qui précèdent résulte évidemment

$$\left| \frac{S_{r+p}(x+h) - S_{r+p}(x)}{h} - \sigma_r(x) \right| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $S(x)$ admet une dérivée et que cette dérivée est la série $\sigma(x)$.

Remarquons que ce théorème n'exige pas que les termes de la série S soient des fonctions uniformément différentiables : il suffit qu'on puisse leur appliquer la formule des accroissements finis.

III. — Fonctions continues sans dérivée.

6. Les fonctions douées de dérivées, bien qu'elles soient les seules qui se présentent dans les applications de l'Analyse, n'en doivent pas moins, d'un point de vue général, être envisagées comme exceptionnelles. Il est très facile de trouver des fonctions *qui n'ont pas de dérivée pour certaines valeurs de la variable.*

Ainsi la fonction $\sqrt[3]{x}$ n'a pas de dérivée pour $x = 0$; car, si l'on forme le rapport

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}},$$

on voit qu'à la suite $h, h', h'', \ldots$, supposée converger vers zéro, correspond la suite

$$\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{h'^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{h''^2}}, \quad \ldots,$$

qui n'est pas convergente.

La fonction $x \sin \frac{1}{x}$ n'a pas non plus de dérivée pour $x = 0$; on a, en effet,

$$\frac{k}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Or, si $h, h', h'', \ldots$ forment une suite convergente ayant pour limite zéro, la suite

$$\sin \frac{1}{h}, \quad \sin \frac{1}{h'}, \quad \sin \frac{1}{h''}, \quad \ldots$$

n'est pas convergente; son mode de divergence est tout autre que celui de la suite considérée dans l'exemple précédent.

7. Il est plus intéressant et aussi plus difficile de former des fonctions continues qui *n'ont de dérivée pour aucune valeur* de la variable. C'est à quoi va nous servir la remarque suivante, d'un caractère très général.

Partons d'une série

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

uniformément convergente dans un certain intervalle, et dont les termes, uniformément différentiables, ont des dérivées premières jouissant de la même propriété et des dérivées secondes *finies,* dans l'intervalle considéré. $S(x)$ est continue *dans* cet intervalle (n° 3).

Soit n un entier assez grand pour que l'on ait

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \rho_n,$$

ρ_n étant une certaine fraction donnée, aussi petite qu'on veut. Une fois n fixé, nous déterminerons h en fonction de n par une loi particulière que nous indiquerons tout à l'heure. Alors, h étant choisi, nous prenons p assez grand pour que la somme S_{n+p} diffère aussi peu qu'on voudra des sommes d'indice plus élevé.

Développons la différence $S_n(x+h) - S_n(x)$ par la formule de Taylor, limitée au terme en h^2; cela fait, ajoutons au second membre les termes qui forment la différence

$$S_{n+p}(x+h) - S_{n+p}(x) - [S_n(x+h) - S_n(x)],$$

nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
&S_{n+p}(x+h) - S_{n+p}(x) \\
&\quad = h[f'_1(x) + \ldots + f'_n(x)] + \frac{h^2}{2}[f''_1(\xi_r) + \ldots + f''_n(\xi_r) + \varepsilon_r] \\
&\qquad + [f_{n+1}(x+h) + f_{n+p}(x+h)] - [f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)].
\end{aligned}$$

L'ensemble des deux derniers groupes de termes est inférieur à $2\rho_n$. Si, d'autre part, nous remplaçons les dérivées secondes, qui sont supposées finies, par des limites supérieures de leurs valeurs absolues, nous obtenons une somme τ_n supérieure, dans tout l'intervalle considéré, à la valeur absolue du coefficient de $h^2 : 2$. De là résulte que l'on peut écrire

$$\left|\frac{S_{n+p}(x+h) - S_{n+p}(x)}{h} - \sigma_n(x)\right| < \frac{|h|}{2}\tau_n + \frac{2\rho_n}{|h|}.$$

Maintenant, nous allons déterminer $|h|$ par la condition de rendre *minimum,* quand n est fixé, le second membre de cette inégalité. Ce second membre est une somme de deux termes positifs dont le produit est constant; cette somme est minima quand ces deux termes sont égaux, c'est-à-dire quand

$$|h| = 2\sqrt{\frac{\rho_n}{\tau_n}}.$$

D'après cette détermination, quand on fera croître n, on obtiendra des valeurs successives de h qui auront pour limite zéro, car ρ_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, tandis que τ_n ne peut que croître. Si l'on porte cette valeur de $|h|$ dans l'inégalité précédente, il vient

$$\left|\frac{S_{n+p}(x+h) + S_{n+p}(x)}{h} - \sigma_n(x)\right| < 2\sqrt{\rho_n\tau_n}.$$

On peut maintenant signaler plusieurs cas où la série $S(x)$ n'aura pas de dérivée.

1° Si le produit $\rho_n\tau_n$ tend vers zéro, quand n grandit indéfiniment, et si la série $\sigma(x)$ est divergente, quel que soit d'ailleurs son mode de divergence, la série $S(x)$ n'a pas de dérivée. En effet, la suite

$$\frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h}, \quad \frac{S_{n'}(x+h') - S_{n'}(x)}{h'}, \quad \ldots$$

est divergente, comme équivalente à la suite $\sigma_n(x)$, $\sigma_{n'}(x)$, ...

2° Si le produit $\rho_n \tau_n$ reste fini quel que soit n, et si la série $\sigma_n(x)$ est divergente, de cette divergence qui consiste en ce que la valeur absolue des termes croît indéfiniment avec n, la série $S(x)$ n'a pas de dérivée.

3° D'une manière plus générale, $S(x)$ n'a pas de dérivée si le rapport

$$\frac{\sqrt{\rho_n \tau_n}}{\sigma_n}$$

reste en valeur absolue inférieur à un nombre moindre que l'unité, la série $\sigma(x)$ étant divergente comme il vient d'être dit; dans ce dernier cas, le produit $\rho_n \tau_n$ peut croître indéfiniment avec n.

8. Voici un cas très remarquable où il est facile de former le produit $\rho_n \tau_n$ et de reconnaître que la série n'a pas de dérivée. Supposons que les termes de $S(x)$ soient tous de la forme

$$\frac{f(a_n x)}{a_n},$$

la fonction uniformément différentiable $f(t)$ restant en valeur absolue moindre qu'un certain nombre M pour toutes les valeurs possibles de t et sa dérivée seconde toujours plus petite qu'un nombre μ. En ce qui concerne les coefficients a_n, on suppose qu'ils sont tous positifs, que leurs inverses forment une série convergente et que le rapport de chacun d'eux au suivant reste inférieur à un certain nombre q moindre que l'unité.

Calculons d'abord ρ_n. On a visiblement

$$\left|\frac{f(a_n x)}{a_n}\right| < \frac{M}{a_n};$$

donc ρ_n est nécessairement inférieur à la somme de la série convergente

$$\frac{M}{a_{n+1}} + \frac{M}{a_{n+2}} + \ldots.$$

On peut donc écrire

$$\rho_n < \frac{M}{a_{n+1}}\left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}} + \ldots\right) < \frac{M}{a_{n+1}}(1 + q + q^2 + \ldots),$$

ou finalement

$$\rho_n < \frac{M}{a_{n+1}(1-q)}.$$

Pour évaluer τ_n, il faut former les dérivées secondes des termes de $S(x)$; l'expression générale de l'une de ces dérivées est $a_n f''(a_n x)$, nombre inférieur à μa_n. On a donc

$$\tau_n < \mu(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Or le second membre, qu'on peut écrire

$$\mu a_n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n} + \ldots\right),$$

est inférieur à

$$\mu a_n (1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{\mu a_n}{1-q}.$$

C'est là une limite supérieure de τ_n.

Des deux résultats qui précèdent nous concluons

$$\rho_n \tau_n < \frac{M\mu}{(1-q)^2} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Si le symbole $f(t)$ représente $\sin t$, les deux limites M et μ peuvent être prises égales à 1, et il vient

$$\rho_n \tau_n < \frac{1}{(1-q)^2} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Appliquons ceci à la série

$$S(x) = \sum_n \frac{\sin(1.2\ldots n.2\pi x)}{1.2\ldots n.2\pi}.$$

Dans cet exemple, on a

$$q = \frac{1}{2}, \qquad a_n = 2\pi n!, \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Le rapport $a_n : a_{n+1}$ devient donc aussi petit qu'on veut et, par suite, $\rho_n \tau_n$ tend vers zéro. D'autre part, la série $\sigma(x)$ des dérivées

premières est divergente, car, pour toute valeur

$$x = \frac{m}{p},$$

tous les termes de cette série, à partir du terme $\cos(2\pi x p!)$, deviennent égaux à ± 1. La série $S(x)$, bien que continue dans tout intervalle, n'admet donc de dérivée pour *aucune* valeur x.

CHAPITRE VIII.

SÉRIES ENTIÈRES.

Parmi les séries dont les termes sont des fonctions, les plus remarquables sont celles qui ont pour termes successifs les puissances croissantes entières et positives de la variable : ce sont les *séries entières* dont les propriétés sont étroitement liées à celles des fonctions appelées *fonctions analytiques*. Nous ferons dans le présent Chapitre une étude assez détaillée des séries entières et nous appliquerons les résultats que nous aurons obtenus à la définition des fonctions sinus et cosinus, dont nous établirons les propriétés fondamentales.

I. — Intervalle de convergence et séries dérivées.

1. La première question qui se pose relativement aux séries entières est celle-ci : une telle série est-elle, dans un certain intervalle au moins, une fonction de x? Il y a des séries entières qui ne convergent que pour $x = 0$. Telles sont les suivantes :

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots,$$
$$1 + 1^1x + 2^2x^2 + \ldots + n^nx^n + \ldots.$$

En effet, quelque petit que soit x, on peut déterminer n de telle façon que le produit de x^n par $n!$ ou par n^n soit en valeur absolue supérieur à l'unité. A partir de ce rang-là, les modules des termes vont en augmentant, les deux séries sont donc divergentes. De telles séries ne sont pas des fonctions de x, puisqu'à tout nombre déterminé x elles font correspondre des sommes $S_n(x)$, $S_{n+1}(x)$, ... qui ne forment pas une suite convergente.

Mais il y a des séries entières

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x_n + \ldots$$

qui sont convergentes pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain intervalle. Ces séries remplissent, comme on le voit immédiatement, toutes les conditions requises (Chap. II, n° 3) pour être des fonctions de x.

La détermination de l'intervalle dans lequel une série entière est convergente résulte d'un théorème fondamental, dû à Abel.

2. Théorème. — *Si, pour $x = x_0$, les modules des différents termes d'une série entière ne dépassent pas un nombre* A, *la série est absolument convergente pour toute valeur x de module moindre que x_0. De plus, elle est uniformément convergente dans tout intervalle $(-x_1, x_1)$ plus petit que l'intervalle $(-x_0, x_0)$.*

Calculons une limite supérieure du module du reste de la série, c'est-à-dire de la somme R_n d'un nombre quelconque de termes après le $(n+1)^{\text{ième}}$. L'expression

$$|R_{n,p}| = |a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p}|$$

peut s'écrire

$$\left| a_{n+1}x_0^{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} + a_{n+2}x_0^{n+2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+2} + \ldots + a_{n+p}x_0^{n+p}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p}\right|.$$

D'après les suppositions faites, on a donc

$$|R_{n,p}| < A\left|\frac{x}{x_0}\right|^{n+1}\left\{1 + \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^{p-1}\right\};$$

d'où il résulte, pour p quelconque,

$$|R_n| < A\left|\frac{x}{x_0}\right|^{n+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$

On voit que R_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

De plus, si x est compris dans l'intervalle $(-x_1, x_1)$, x_1 étant d'ailleurs inférieur à x_0, mais aussi voisin qu'on voudra de x_0, on a

$$|R_n| < A\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^{n+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x_1}{x_0}\right|}.$$

Cette limite de $|R_n|$ étant indépendante de x, la série $S(x)$ est uniformément convergente dans l'intervalle $(-x_1, x_1)$. C'est donc, d'après un théorème général antérieurement établi (Chap. VII, n° 3), une fonction continue de x *dans* tout cet intervalle.

Inversement, on démontre sans difficulté que, si $S(x)$ est divergente pour $x = x'_0$, elle est divergente pour toute valeur x de module plus grand que $|x'_0|$. D'où résulte cette propriété remarquable : *l'intervalle positif où* $S(x)$ *est une fonction de* x *a la même étendue que l'intervalle négatif où* $S(x)$ *possède cette propriété.*

3. *Séries dérivées.* — Nous appellerons *série dérivée* [1] d'une série entière $S(x)$ la série entière $S'(x)$ formée par les dérivées des termes de $S(x)$.

Plus généralement nous appellerons *$n^{ième}$ série dérivée* d'une série entière $S(x)$ la série entière $S^{(n)}(x)$ formée par les dérivées d'ordre n des termes de $S(x)$.

Ces diverses séries dérivées jouissent de la propriété commune d'être *convergentes dans tout intervalle* $(-x_1, x_1)$ *plus petit que l'intervalle de convergence* $(-x_0, x_0)$ *de la série* $S(x)$.

C'est ce qui résultera immédiatement de l'existence d'une limite supérieure pour la valeur absolue de $S^{(n)}(x)$ dans l'intervalle $(-x_1, x_1)$. Pour la série

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

on a, par définition,

$$S^{(n)}(x) = n!\,a_n + \frac{(n+1)!}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{1.2} a_{n+2} x^2 + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$S^{(n)}(x) = \frac{1}{x_0^n}\left[n!\,a_n x_0^n + \frac{(n+1)!}{1} a_{n+1} x_0^{n+1} \frac{x}{x_0} + \frac{(n+2)!}{1.2} a_{n+2} x_0^{n+2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots\right].$$

---

[1] Cette dénomination sera justifiée un peu plus tard, quand nous aurons démontré (n° 7) que la série $S'(x)$ est la dérivée de la série $S(x)$.

On a donc évidemment

$$|S^n(x)| < \frac{A}{x_0^n}\left[n! + \frac{(n+1)!}{1}\left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{(n+2)!}{1.2}\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots\right]$$

et, à plus forte raison,

$$|S^n(x)| < \frac{A\,n!}{x_1^n}\left[1 + \frac{n+1}{1}\left|\frac{x}{x_1}\right| + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2}\left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + \ldots\right].$$

Remarquons que la série entre crochets représente

$$\left(1 - \left|\frac{x}{x_1}\right|\right)^{-n-1},$$

comme on peut s'en assurer facilement [1]. On a donc, pour toute valeur x comprise entre $-x_1$ et x_1,

$$|S^{(n)}(x)| < \frac{A}{x_1^n}\,\frac{n!}{\left(1 - \left|\frac{x}{x_1}\right|\right)^{n+1}}.$$

Telle est la limite supérieure que nous voulions obtenir.

II. — Fonctions analytiques et séries entières.

4. *Fonctions analytiques.* — On dit qu'une fonction $f(x)$ est *analytique pour* une certaine valeur x, si l'on peut déterminer un nombre positif α tel que, h étant un nombre quelconque compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, l'expression de $f(x+h)$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières de h.

D'après cette définition, une série entière $S(x)$, convergente pour d'autres valeurs que $x = 0$, est *analytique pour* $x = 0$. Nous allons démontrer qu'*une série entière est analytique pour tout nombre x appartenant à son intervalle de convergence.* Le développement de $S(x+h)$ par la formule de Taylor nous

[1] Il suffit d'appliquer la formule de Maclaurin (Chap. VI, n° 12) à la fonction $(1-\xi)^{-n-1}$, dans l'hypothèse $|\xi| < 1$; le terme complémentaire tend alors vers zéro quand le nombre de ceux qui le précèdent augmente indéfiniment. On peut aussi arriver par d'autres voies à ce résultat.

servira d'ailleurs dans toute la théorie des séries entières, dont il peut être considéré comme le fondement.

5. Théorème. — *Si x et $x+h$ sont deux nombres compris dans l'intervalle de convergence de la série entière* $S(x)$, *on peut développer* $S(x+h)$ *en série convergente suivant les puissances de h.*

Avant d'établir l'importante formule

$$S(x+h) = S(x) + \frac{h}{1} S'(x) + \frac{h^2}{1.2} S''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}(x) + \ldots,$$

disons quelle est sa signification précise : *étant donnée une fraction positive* ε, *aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un entier r assez grand pour que l'expression* $S_{r+q_1}(x+h) - S_{r+q}(x)$ *diffère de moins de* ε *de la somme*

$$\frac{h}{1} S'_{r+p_1}(x) + \frac{h^2}{1.2} S''_{r+p_2}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}_{r+p_n}(x),$$

n étant un entier quelconque supérieur à r; et q_1, q, p_1, p_2, ..., p_n des entiers positifs absolument quelconques. Les indices inférieurs marquent le nombre de termes qu'on prend dans la série proposée $S(x)$ pour calculer chaque série dérivée.

Soit p un entier positif indéterminé; écrivons

$$S_{r+p}(x) = S_r(x) + R_r(x),$$
$$S_{r+p}(x+h) = S_r(x+h) + R_r(x+h),$$

et calculons la différence $S_{r+p}(x+h) - S_{r+p}(x)$, en développant les divers binomes $(x+h)^m$ qui figurent dans $S_{r+p}(x+h)$ et ordonnant les puissances croissantes de h. Nous trouvons ainsi

$$S_{r+p}(x+h) - S_{r+p}(x) = \frac{h}{1} S'_{r+p}(x) + \frac{h^2}{1.2} S''_{r+p}(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} S^{(n)}_{r+p}(x) + \alpha_{n+1} h^{n+1} + \ldots + \alpha_{r+p} h^{r+p},$$

l'indice *n étant inférieur à $r+p$.* Au lieu de cela, ne prenons dans $S(x)$ que $r+p_1$ termes pour calculer le coefficient de h; n'en prenons que $r+p_2$ pour calculer celui de h^2; ..., que

$r+p_n$ pour celui de h^n, ..., *les entiers positifs* p_1, p_2, ..., p_n, ... *étant arbitraires, mais inférieurs à* p.

Certains des termes primitivement calculés (termes en h, h^2, ...) se trouveront reportés à une partie complémentaire du développement que nous désignerons par τ, et nous aurons

$$\begin{aligned} &S_{r+p}(x+h) - S_{r+p}(x) \\ &\quad = \frac{h}{1} S'_{r+p_1}(x) + \frac{h^2}{1.2} S''_{r+p_2}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}_{r+p_n}(x) + \tau. \end{aligned}$$

Si $n > r$, le terme complémentaire τ se compose de termes empruntés exclusivement à $R_r(x+h)$, puisque $S_r(x+h)$ ne donne que les suivants

$$\frac{h}{1} S'_r(x) + \frac{h^2}{1.2} S''_r(x) + \ldots + \frac{h^r}{r!} S^{(r)}_r(x),$$

conservés, par hypothèse, dans le développement qui précède τ. En conséquence, $|\tau|$ est plus petit que la limite supérieure trouvée ci-dessus (n° 2) pour $|R_r|$, quand l'argument (ici $x+h$) est en valeur absolue moindre que x_0. On a donc

$$|\tau| < A \left|\frac{x+h}{x_0}\right|^{r+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{x+h}{x_0}\right|},$$

et le second membre peut être rendu plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour r suffisamment grand.

Soient maintenant q_1 et q deux entiers positifs *absolument quelconques*. Quand r est suffisamment grand, on a

$$|S_{r+q_1}(n+h) - S_{r+p}(x+h)| < |R_r(x+h)|;$$

par conséquent, le premier membre est moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Dans les mêmes conditions, on a

$$|S_{r+q}(x) - S_{r+p}(x)| < R_r(x);$$

le premier membre est donc moindre *a fortiori* que la limite

$$A \left|\frac{x}{x_0}\right|^{r+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|},$$

qui tombe au-dessous de $\frac{\varepsilon}{3}$.

L'inégalité annoncée est établie par là; car p ayant disparu, la restriction précédemment imposée aux entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tombe d'elle-même, ainsi que celle qui était imposée à n.

6. En s'appuyant sur le résultat précédent et considérant $S(x+h)$ comme une série entière par rapport à leur variable h, on arrive immédiatement à cette conclusion importante :

THÉORÈME. — *Si une fonction $f(x)$ est analytique pour le nombre x, $f(x+h)$ étant développable suivant les puissances entières de h pour tout h moindre en valeur absolue qu'un certain nombre α, cette fonction $f(x)$ est analytique pour tout nombre x' compris entre $x-\alpha$ et $x+\alpha$.*

En d'autres termes, ayant choisi arbitrairement un nombre x' entre $x-\alpha$ et $x+\alpha$, on pourra déterminer un nombre positif α' tel que h étant quelconque dans l'intervalle $(-\alpha, +\alpha)$, $f(x'+h)$ soit développable suivant les puissances entières de h par la formule de Taylor.

III. — Différentiation des séries entières; développements en série.

7. THÉORÈME. — *Une série entière $S(x)$, convergente dans l'intervalle $(-x_0, x_0)$, admet une dérivée pour toute valeur x supérieure à $-x_0$ et inférieure à x_0. Cette dérivée est égale à la série formée par les dérivées des termes de $S(x)$, et la fonction $S(x)$ est uniformément différentiable dans tout intervalle $(-x_1, x_1)$ plus petit que son intervalle de convergence.*

Pour établir ce théorème, reportons-nous à la démonstration qui vient d'être donnée (n° 5) de la formule de Taylor. On a trouvé

$$\begin{aligned} &S_{r+q_1}(x+h) - S_{r+q}(x) \\ &\quad = \frac{h}{1} S'_{r+p_1}(x) + \frac{h^2}{2!} S''_{r+p_2}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}_{r+p_n}(x) + \rho, \end{aligned}$$

en posant

$$\rho = \tau - [S_{r+q_1}(x+h) - S_{r+p}(x+h)] + [S_{r+q}(x) - S_{r+p}(x)],$$

et l'on a reconnu que τ et le terme suivant sont l'un et l'autre moindres en valeur absolue que

$$A\left|\frac{x+h}{x_0}\right|^{r+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x+h}{x_0}\right|},$$

tandis que l'on avait

$$|S_{r+q}(x)-S_{r+p}(x)|<A\left|\frac{x}{x_0}\right|^{r+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$

On peut donc écrire

$$|\rho|<2A\left|\frac{x+h}{x_0}\right|^{r+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x+h}{x_0}\right|}+A\left|\frac{x}{x_0}\right|^{r+1}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$

Or x et $x+h$ sont compris entre $-x_1$ et x_1. Si donc on remplace ces deux nombres par x_1, on majore encore le second membre et l'on trouve, *a fortiori*,

$$|\rho|<\frac{3A\xi^{r+1}}{1-\xi},\qquad \xi=\left|\frac{x_1}{x_0}\right|,$$

de sorte que l'on peut poser

$$\rho=\frac{3\theta A\xi^{r+1}}{1-\xi}\qquad(-1<\theta<1).$$

Formons maintenant la différence

$$\Delta=\frac{S_{r+q_1}(x+h)-S_{r+q}(x)}{h}-S'_{r+p_1}(x).$$

Nous obtenons immédiatement

$$\Delta=\frac{h}{2!}S''_{r+p_2}(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{n!}S^{(n)}_{r+p_n}(x)+\frac{3\theta A\xi^{r+1}}{h(1-\xi)}.$$

Or nous avons trouvé (n° 3) pour la valeur de $|S^{(n)}(x)|$ une limite qui sera majorée si l'on remplace x par x_1, ce qui donne

$$|S^{(n)}(x)|<\frac{An!}{|x_0|^n(1-\xi)^{n+1}}.$$

Appliquons ce résultat aux diverses dérivées qui composent

l'expression de Δ. Nous avons évidemment

$$|\Delta| < \frac{A|h|}{x_0^2(1-\xi)^3}\left[1+\frac{|h|}{x_0(1-\xi)}+\frac{|h|^2}{x_0^2(1-\xi)^2}+\ldots+\frac{|h|^{n-2}}{x_0^{n-2}(1-\xi)^{n-2}}\right]+\frac{3A\xi^{r+1}}{|h|(1-\xi)};$$

ou, *a fortiori*,

$$|\Delta| < \frac{A|h|}{x_0^2(1-\xi)^3}\,\frac{1}{1-\dfrac{|h|}{x_0(1-\xi)}}+\frac{3A\xi^{r+1}}{|h|(1-\xi)}.$$

Écrivons maintenant que le premier terme du second membre est moindre que $\varepsilon : 2$. Nous obtenons ainsi une inégalité du premier degré en $|h|$, d'où l'on tirera

$$|h| < \alpha,$$

α étant un nombre positif *indépendant de* x, qu'il serait facile d'écrire. Choisissons pour h une valeur absolument quelconque, pourvu qu'elle satisfasse à l'inégalité ci-dessus. Ayant fixé h, nous pouvons prendre l'entier r assez grand pour vérifier l'inégalité

$$\frac{3A\xi^{r+1}}{|h|(1-\xi)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $|\Delta|$ est effectivement moindre que ε, ce qui montre que la série $S(x)$ a pour dérivée la série $S'(x)$. En outre, comme α ne dépend pas de x, $S(x)$ est uniformément différentiable dans tout l'intervalle $(-x_1, x_1)$.

Il en est évidemment de même des dérivées successives de $S(x)$: ainsi, l'on peut déterminer un intervalle $(-x_1, x_1)$ plus petit que l'intervalle de convergence $(-x_0, x_0)$ de $S(x)$, mais aussi rapproché qu'on veut de celui-là, et qui sera tel que la série $S(x)$ et l'une quelconque de ses dérivées successives soient uniformément différentiables dans cet intervalle.

8. *Remarque sur les développements en série entière.* — Pour établir la formule de Maclaurin (Chap. VI, n° 12), nous avions supposé que la fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées étaient uniformément différentiables dans l'intervalle $(0, x)$. On voit que ces conditions sont nécessaires pour que la fonction $f(x)$ puisse

être représentée par une série entière

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes, comme on le reconnaît par l'exemple de la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

que nous avons étudiée précédemment (Chap. VI, n° 13). Nous avons montré que cette fonction et ses dérivées de tous les ordres sont uniformément différentiables *dans tout intervalle,* et qu'elles sont *toutes nulles* pour $x = 0$. Tous les coefficients a_0, a_1, ..., a_n, ... de la série à laquelle conduit l'application de la formule de Maclaurin étant nuls, la série disparaît et le développement est impossible, ou plutôt il est illusoire, se réduisant au seul *reste,* qui est nécessairement identique à la fonction elle-même.

Pour qu'une fonction, uniformément différentiable ainsi que ses dérivées de tous les ordres, soit développable en série entière, *il faut et il suffit* évidemment que le reste de la formule de Maclaurin tende vers zéro, quand n croît indéfiniment. Mais cette condition n'est qu'une tautologie, dont l'énoncé n'apprend rien, puisque l'expression du reste dépend d'une suite convergente dont on ne sait pas, en général, calculer les termes.

Cependant, l'étude de ce reste peut, dans certains cas particuliers, montrer la possibilité du développement. Par exemple, si dans l'intervalle $(0, x)$ la fonction et toutes ses dérivées restent en valeur absolue inférieures à un nombre M, le reste qu'on obtient en faisant $p = n$ a lui-même son module moindre que

$$\frac{M|x|^n}{n!}$$

et tend visiblement vers zéro quand n devient infiniment grand. Nous n'insisterons pas sur les exemples classiques dans lesquels cette circonstance se présente.

IV. — Propriétés relatives aux racines d'une série entière et de ses dérivées.

9. Nous allons démontrer un certain nombre de théorèmes qui font ressortir la grande analogie des séries entières avec les polynomes. Nous chercherons d'abord *une limite inférieure de la valeur absolue des racines* d'une telle série

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

On a évidemment, quel que soit x dans l'intervalle de convergence,

$$|S(x)| > |a_0| - |a_1 x + a_2 x^2 + \ldots|.$$

Le second terme du second membre peut s'écrire

$$\left| a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots \right|.$$

Si x_0 désigne la limite supérieure de l'intervalle dans lequel la série $S(x)$ est convergente et A le nombre auquel sont inférieurs tous les modules

$$|a_1 x_0|, \quad |a_2 x_0^2|, \quad \ldots, \quad |a_n x_0^n|, \quad \ldots,$$

l'expression considérée est visiblement moindre que

$$A\left\{\left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots\right\} = A\left|\frac{x}{x_0}\right| \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$

On a donc, quel que soit x,

$$|S(x)| > |a_0| - A\left|\frac{x}{x_0}\right| \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$

Si x est une racine de $S(x)$, cette inégalité donne

$$|x| > \frac{|a_0 x_0|}{|a_0| + A}.$$

Plus généralement, si la série $S(x)$ a ses premiers coefficients nuls, soit a_n le premier coefficient différent de zéro. On verra

de même que *toute racine non nulle de* $S(x)$ *satisfait à l'inégalité*

$$|x| > \frac{|a_n x_0|}{|a_n| + A}.$$

On a ainsi une limite inférieure de la valeur absolue des racines de la série $S(x)$.

10. Théorème I. — *Si une série entière est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour la valeur* $x = 0$, *elle est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, dans tout l'intervalle de convergence.*

Appliquant à une série entière la formule de Maclaurin, qui n'est qu'un cas particulier de celle de Taylor, nous sommes en droit (n° 5) d'écrire

$$S(x) = S(0) + \frac{x}{1} S'(0) + \frac{x^2}{1.2} S''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} S^{(n)}(0) + \ldots.$$

Ce développement, qui est valable pour tout nombre x compris dans l'intervalle de convergence, rend la proposition évidente pour $S(x)$. La conclusion s'étend aux séries dérivées, qui sont des séries entières ayant même intervalle de convergence que la série proposée (n° 3).

Théorème II. — *Si une série entière admet comme racines tous les termes* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *d'une suite convergente ayant pour limite zéro, elle est nulle pour tout nombre* x *appartenant à son intervalle de convergence.*

En effet, d'après la formule qui termine le paragraphe précédent (n° 9), *aucun* des coefficients a_n de la série proposée ne peut être différent de zéro.

Il résulte de là que *les fonctions qui prennent une infinité de fois la valeur zéro aux environs de* $x = 0$ *ne peuvent pas être développées en série entière.* Tel est le cas de la fonction

$$x^\alpha \sin \frac{1}{x} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots).$$

Théorème III. — *Si une série entière est nulle pour tous les nombres d'un intervalle, aussi petit qu'il soit, comprenant*

la valeur zéro, elle est nulle pour tout nombre x appartenant à son intervalle de convergence.

On peut, en effet, constituer des suites convergentes ayant pour limite zéro et dont tous les termes sont des racines de $S(x)$, ce qui ramène au théorème II.

Si maintenant l'on compare deux séries entières, supposées convergentes dans le même intervalle $(-x_0, x_0)$, il suffit de considérer leur différence, qui est une série entière, pour arriver aux conclusions suivantes :

Si deux séries entières ont même valeur pour une infinité de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tendant vers zéro, elles sont identiques, c'est-à-dire que les coefficients de chaque puissance de x sont les mêmes dans ces deux séries.

Si deux séries entières ont même valeur pour tous les nombres d'un intervalle $(0, \varepsilon)$, *si petit qu'il soit, elles sont identiques.*

Si une fonction est développable en série entière, elle ne l'est que d'une seule manière.

11. Nous allons, au moyen de la formule de Taylor, étendre les résultats précédents à des suites convergentes qui n'ont pas pour limite zéro et à des intervalles qui ne comprennent pas la valeur zéro.

Généralisation du théorème I. — *Si une série entière est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour un nombre x' compris dans son intervalle de convergence, elle est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, dans tout l'intervalle de convergence.*

Employons le développement

$$S(x'+h) = S(x') + \frac{h}{1} S'(x') + \ldots$$

valable pour tout nombre h inférieur en valeur absolue au plus petit des deux nombres $|x_0 - x'|$, $|x' + x_0|$ Supposons d'abord que ce plus petit nombre soit le premier. Par hypothèse, on a

$$0 = S(x') = S'(x') = S''(x') = \ldots.$$

Donc la série $S(x'+h)$ est nulle pour tout h tel que

$$|h| < |x_0 - x'|;$$

c'est-à-dire que $S(x)$ est nulle pour tout nombre x compris dans l'intervalle $(2x' - x_0, x_0)$. Si cet intervalle comprend la valeur o, $S(x)$ est nulle entre $-x_0$ et x_0, d'après le théorème III.

Dans le cas contraire, désignons par x'' un nombre compris entre $2x' - x_0$ et x_0. La fonction $S(x)$ est nulle pour $x = x''$ et pour $x = x'' + h$ quel que soit h, pourvu qu'on ait

$$|h| < x'' - (2x' - x_0).$$

Le développement en série

$$0 = S(x''+h) = S(x'') + \frac{h}{1} S'(x'') + \ldots$$

montre que toutes les dérivées de S sont nulles pour $x = x''$. On pourra donc raisonner sur x'' comme on l'a fait sur x'. On verra ainsi que $S(x)$ est nulle dans tout l'intervalle $(2x'' - x_0, x)$.

En répétant plusieurs fois, s'il y a lieu, le raisonnement précédent, on étendra de plus en plus l'intervalle où $S(x)$ est nulle. Comme on peut prendre x'' aussi voisin qu'on veut de $2x' - x_0$, puis x''' aussi voisin qu'on veut de $2x'' - x_0$, l'intervalle obtenu après n extensions successives différera aussi peu qu'on voudra de l'intervalle dont la limite inférieure est $2^n x' - (2^n - 1)x_0$. Or cette limite sera négative, si l'on prend n tel que $2^n(x_0 - x')$ soit supérieur à x_0, ce qui est évidemment toujours possible.

La démonstration se fait de même si x' est plus voisin de $-x_0$ que de x_0.

Par application de ce théorème, on voit que la fonction

$$e^{-\frac{1}{(x-a)^2}},$$

nulle ainsi que toutes ses dérivées (Chap. VI, n° 13) pour $x = a$, ne peut pas être développée en série entière dans un intervalle $(-x_0, x_0)$ qui comprendrait le nombre a.

Remarque. — Rien de ce qui vient d'être dit n'empêche la série et ses dérivées successives d'être toutes nulles pour les valeurs extrêmes de l'intervalle de convergence $(-x_0, x_0)$.

12. Généralisation du théorème II. — *Si une série entière admet comme racines tous les termes $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ d'une suite convergente quelconque, comprise dans son intervalle de convergence $(-x_0, x_0)$, mais n'ayant pour limite ni $-x_0$, ni x_0, elle est nulle pour tout nombre x appartenant à cet intervalle.*

Pour tout h compris dans un certain intervalle, on aura

$$S(x_p+h) = S(x_p) + \frac{h}{1} S'(x_p) + \ldots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}(x_p) + \ldots.$$

Comme $S(x_p)$ et $S(x_{p+1})$ sont nuls, la valeur

$$h = x_{p+1} - x_p$$

annule le second membre; elle est aussi petite qu'on veut, pour p suffisamment grand. Ceci exige (n° 9) que toutes les dérivées de S soient nulles pour x_p; on est ramené au théorème précédent.

13. Généralisation du théorème III. — *Si une série entière est nulle pour tous les nombres d'un intervalle, aussi petit qu'il soit, compris dans son intervalle de convergence, elle est nulle pour tout nombre x appartenant à l'intervalle de convergence.*

Cet énoncé se déduit du précédent comme le théorème III se déduit du théorème II.

Corollaire. — *Si deux séries entières, convergentes l'une et l'autre dans l'intervalle $(-x_0, x_0)$, ont même valeur pour tous les nombres d'un intervalle (x_1, x_2) aussi petit qu'il soit, compris dans le précédent, elles sont identiques.*

En effet, leur différence, qui est une série entière, étant nulle pour tout nombre de l'intervalle (x_1, x_2), est nulle quel que soit x dans l'intervalle : or nous entendons par là (théorème II) que tous ses coefficients sont nuls.

14. Ce qui précède permet d'établir une importante propriété des séries entières :

Théorème. — *Tout intervalle $(-x_1, x_1)$, intérieur à l'inter-*

valle de convergence, peut être décomposé en un nombre fini d'autres intervalles dans chacun desquels la série $S(x)$ *est croissante ou décroissante.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la dérivée $S'(x)$ s'annulerait pour une infinité de valeurs x comprises entre $-x_1$ et x_1. Mais cette dérivée est elle-même une série entière. Nous arriverons donc à une contradiction, si nous prouvons qu'on pourrait, avec les valeurs de ces racines, composer au moins une suite convergente.

Or, divisons l'intervalle $(-x_1, +x_1)$ en deux intervalles égaux; l'un au moins comprend une infinité de racines. On le subdivisera en deux, dont l'un au moins comprendra encore une infinité de racines. On formera ainsi une suite d'intervalles (a_n, b_n), tendant vers zéro, compris chacun dans le précédent et comprenant chacun une infinité de racines. Une suite quelconque de ces nombres racines, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \ldots$, pris respectivement dans les intervalles (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n), constituera une suite convergente dont *tous* les termes seront racines de $S'(x)$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Le théorème n'est pas vrai de l'intervalle total de convergence $(-x_0, x_0)$. Une infinité de maxima ou de minima pourraient s'accumuler vers ses extrémités.

V. — Application de la théorie des séries entières aux fonctions circulaires.

15. Nous allons chercher à déterminer deux fonctions de x que nous appellerons $\sin x$ et $\cos x$, satisfaisant, s'il est possible, aux deux équations fonctionnelles

$$(1) \qquad \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h,$$

$$(2) \qquad \cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$

ainsi qu'à la condition d'admettre une dérivée *pour* $x = 0$, celle de $\sin x$ étant égale à l'unité et celle de $\cos x$ égale à zéro.

Nous ne ferons aucune autre hypothèse sur ces fonctions : nous

ne supposerons même pas *a priori* que $\sin x$ et $\cos x$ soient des fonctions continues, ou seulement finies.

Cherchons d'abord les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ pour $x = 0$. Faisons dans les équations données $x = h = 0$; il vient

$$(1') \qquad \sin 0 = 2 \sin 0 \cos 0,$$

$$(2') \qquad \cos 0 = \cos^2 0 + \sin^2 0.$$

On aperçoit immédiatement la solution

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1.$$

Je dis qu'il n'y en a point d'autre. En effet, si $\sin 0$ n'était pas nul, on pourrait diviser par $\sin 0$ les deux membres de l'équation (1'), qui se réduirait à

$$\cos 0 = \frac{1}{2}.$$

Alors la relation (2') donnerait pour $\sin^2 0$ une valeur négative, ce qui est inacceptable. Ainsi $\sin 0$ est nul; et, par suite, $\cos 0$ est égal à l'unité.

Cela posé, ajoutons membre à membre les équations (1) et (2), préalablement élevées au carré; nous obtenons

$$\sin^2(x+h) + \cos^2(x+h) = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 h + \cos^2 h).$$

Si donc on pose

$$F(x) = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

on aura

$$F(x+h) = F(x)\,F(h).$$

Nous savons que toute fonction $F(x)$ satisfaisant à cette équation fonctionnelle (Chap. IV, n° 8) est nécessairement de la forme a^x, a étant un nombre positif. Nous allons montrer que dans le cas présent cette exponentielle se réduit à l'unité.

Cherchons, en effet, la dérivée de $F(x)$ pour $x = 0$. On a, pour $x = 0$,

$$\frac{k}{h} = \frac{F(h) - F(0)}{h}.$$

Or les relations

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1$$

entraînent $F(0)=1$. On a donc

$$\frac{k}{h} = \sin h \frac{\sin h}{h} + \frac{\cos^2 h - 1}{h}.$$

Faisons tendre h vers zéro ; par hypothèse, le rapport $\frac{\sin h}{h}$ tend vers l'unité, puisque $\sin x$ est supposé avoir pour $x = 0$ une dérivée égale à 1 ; d'autre part, puisque la fonction $\sin x$ est continue *pour* $x = 0$, et qu'on a prouvé que $\sin 0$ est nul, $\sin h$ tend vers zéro ; le premier terme du second membre s'évanouit donc.

Quant au second terme, nous l'écrirons

$$\frac{\cos^2 h - 1}{h} = (\cos h + 1)\frac{\cos h - 1}{h} = (\cos h + 1)\frac{\cos h - \cos 0}{h};$$

on voit ainsi qu'il tend vers zéro avec h, puisque $\cos x$ admet, par hypothèse, pour $x = 0$, une dérivée nulle. De tout ceci résulte

$$F'(0) = 0.$$

Mais, comme $F(x)$ est une exponentielle, on sait que sa dérivée (Chap. V, n° 12) est pour $x = 0$ égale à

$$\frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

Il faut donc que a soit égal à l'unité, puisque son logarithme est nul. En conséquence on a

$$F(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

De là résulte que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, si elles existent, sont des fonctions finies.

16. Nous allons voir que l'une et l'autre admettent une dérivée pour toute valeur x. Formons, en effet, le rapport

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

D'après ce qui a été vu, ce rapport tend vers $\cos x$ quand h tend vers zéro ; c'est-à-dire qu'on peut déterminer un nombre positif α, tel que, sous la seule condition $|h| < \alpha$, on ait

$$\left|\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x\right| < \varepsilon,$$

ε étant une fraction aussi petite qu'on voudra. Il y a plus : *le nombre α ne dépend pas de x.* Cherchons, en effet, à vérifier l'inégalité

$$\left|\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} - 1\right)\right| < \varepsilon.$$

Puisque $\sin x$ et $\cos x$ sont en valeur absolue inférieurs à l'unité, il suffit de satisfaire à l'inégalité

$$\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| + \left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| < \varepsilon.$$

Or, par hypothèse, $\sin x$ et $\cos x$ ont pour $x = 0$ des dérivées, respectivement égales à 1 et à zéro. On peut donc déterminer un nombre α tel que, sous la condition $|h| < \alpha$, on ait à la fois

$$\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et ce nombre α est évidemment indépendant de x. Ainsi la fonction $\sin x$ est uniformément différentiable dans tout intervalle où elle existe et sa dérivée est $\cos x$.

On prouverait qu'il en est de même de $\cos x$ et que sa dérivée est $-\sin x$.

17. Il suit immédiatement de là que $\sin x$ et $\cos x$ ont des dérivées de *tous* les ordres, qui sont *uniformément différentiables,* et qui, de plus, restent *toutes* en valeur absolue *inférieures à tout nombre plus grand que l'unité.* Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ remplissent donc des conditions suffisantes (n° 8) pour être développables par la formule de Maclaurin. En effectuant les développements, on trouve sans peine

$$(3) \qquad \begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots. \end{cases}$$

Mais la question n'est pas achevée. Il faut prouver que ces deux séries, qui sont convergentes pour toute valeur de x, satisfont aux équations (1) et (2). Ce sont, d'après ce que nous savons (n° 5), des fonctions analytiques *pour toute valeur x,*

c'est-à-dire qu'on peut, quels que soient x et h, leur appliquer la formule de Taylor. On trouve ainsi

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \ldots,$$

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \ldots.$$

Nous avons expliqué dans quel sens il faut entendre le signe d'égalité qui sépare les deux membres de ces formules. Si, dans chacun de ces seconds membres, on réunit tous les termes en $\sin x$ et tous les termes en $\cos x$, et qu'on tienne compte des équations (3), on retrouvera immédiatement les relations (1) et (2), qu'il s'agissait de vérifier. Les séries (3) fournissent donc la solution complète du problème proposé.

18. *Périodicité.* — Écrivons la première comme il suit :

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{2.3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{9.10}\right) + \ldots.$$

Tous les binomes entre parenthèses sont positifs quand x est compris entre zéro et 2. Donc $\sin x$ est positif pour toutes ces valeurs.

Écrivons aussi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \ldots.$$

Les binomes entre parenthèses sont tous positifs pour $x = 2$, valeur qui rend négative l'expression

$$1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right).$$

Il suit de là que $\cos 2$ est négatif. Or $\cos 0$ est égal à 1. Donc $\cos x$, qui est une fonction finie et continue de x, a au moins une racine comprise entre zéro et 2. Comme c'est une fonction décroissante dans cet intervalle, en vertu de la relation

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$

elle n'a qu'*une* racine entre 0 et 2. Nous pouvons calculer cette racine par la méthode générale que nous avons indiquée (Chap. IV,

n° 2) pour calculer le nombre x qui fait prendre à une fonction continue une valeur donnée. Nous trouverons ainsi une suite convergente dont nous désignerons les termes successifs par

$$\frac{\pi_1}{2}, \quad \frac{\pi_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi_n}{2}, \quad \ldots$$

et d'une façon générale par $\frac{\pi}{2}$, quand nous ne voudrons pas spécifier le rang. L'existence de cette racine entraîne la périodicité des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. En effet, dans les équations (1) et (2), faisons $h = \frac{\pi_n}{2}$. Nous pouvons disposer de l'indice n de façon que $\cos\frac{\pi_n}{2}$ soit en valeur absolue inférieur à une fraction donnée ε_n. Nous aurons alors

$$(4) \qquad \sin\left(x + \frac{\pi_n}{2}\right) = \theta\varepsilon_n \sin x + \sin\frac{\pi_n}{2}\cos x \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Or, en vertu de la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on a

$$\sin\frac{\pi_n}{2} = \sqrt{1 - \theta^2\varepsilon_n^2} < 1 - \frac{\theta^2\varepsilon_n^2}{2};$$

le signe $+$ a été donné au radical, parce que $\sin x$ est positif quand x est compris entre 0 et 2.

De là résulte qu'on a également

$$\sin\frac{\pi_n}{2} > 1 - \theta^2\varepsilon_n^2,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\sin\frac{\pi_n}{2} = 1 - \theta'\varepsilon_n^2 \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Par suite, la formule (4) devient

$$\sin\left(x + \frac{\pi_n}{2}\right) = \cos x + \varepsilon_n(\theta_1 - \theta'_1\varepsilon_n) \qquad (0 < \theta_1, \theta'_1 < 1),$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi_n}{2}\right) &= \theta\varepsilon_n \cos x - \sin\frac{\pi_n}{2}\sin x \\ &= -\sin x + \varepsilon_n(\theta_2 + \theta'_2\varepsilon_n) \qquad (0 < \theta_2, \theta'_2 < 1).\end{aligned}$$

Faisant usage de ces deux expressions pour former, d'après l'équation (1), la valeur de $\sin(x+\pi_n)$, on trouvera

$$\sin(x+\pi_n) = -\sin x + 2\varepsilon_n(\vartheta + \vartheta'\varepsilon_n) \qquad (0 < \vartheta,\ \vartheta' < 1).$$

Il suffit donc de disposer de n pour rendre l'égalité

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

aussi approchée qu'on voudra, ce qui démontre la périodicité de $\sin x$, en précisant le sens de ce terme. La périodicité de $\cos x$ s'établit alors immédiatement.

CHAPITRE IX.

INTÉGRALES ET FONCTIONS PRIMITIVES. SÉRIE DE FOURIER.

Dans ce Chapitre nous étudions les propriétés des fonctions engendrées par l'intégration, ainsi que celles des fonctions primitives, et nous donnons plus d'extension à la notion d'intégrabilité. L'examen de certaines intégrales dépendant d'un paramètre, qui présentent une particularité remarquable, conduit aux développements en série de Fourier.

I. — Fonctions ayant une intégrale donnée.

1. Quand une fonction $f(x)$ est intégrable, les sommes S_n, S'_n, ..., considérées au Chapitre III (n° 1), définissent une seule et même fonction $F(x)$ de la variable X. Cette fonction est appelée l'*intégrale* de $f(x)$, prise entre x_0 et X, et on la représente par le symbole

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx;$$

les nombres x_0 et X sont dits les *limites* inférieure et supérieure de l'intégrale. Dans ce symbole, dx désigne un intervalle au plus égal à un nombre α tel que toutes les sommes S_n composées avec des intervalles moindres que α diffèrent entre elles de moins d'une fraction donnée ε (celle qui exprime l'ordre de petitesse des fractions que l'on est convenu de négliger).

Mais le *problème inverse,* qui consisterait, se donnant une fonction F(X), à en trouver une autre $f(x)$ dont la première fût l'intégrale, prise entre x_0 et X, n'est pas déterminé. *En effet, il existe une infinité de fonctions qui ont même intégrale.* En

voici d'abord un exemple évident. Supposons que $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient deux fonctions qui, dans l'intervalle (x_0, X), coïncident, sauf pour un certain nombre de valeurs. La différence

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$$

est nulle, sauf pour ces valeurs, et l'intégrale de $\varphi(x)$ est évidemment nulle. Il en résulte, comme on le verra aisément, que l'intégrale de $f(x)$ est égale à celle de $\varphi(x)$.

Voici un autre exemple, bien plus instructif, par lequel nous prouverons l'existence de fonctions $\psi(x)$ *non nulles* et *dont l'intégrale est nulle* pour toute valeur X comprise dans l'intervalle (a, b) où ces fonctions $\psi(x)$ sont définies. En effet, tous les nombres x compris entre a et b sont des entiers ou des fractions *que nous supposerons réduites chacune à leur plus simple expression.* Pour toutes les valeurs x qui sont des fractions irréductibles de dénominateur p (des entiers si $p = 1$), nous attribuons à $\psi(x)$ la même valeur $f(p) : N_p$, où N_p est le nombre des fractions irréductibles de dénominateur p comprises entre a et b ; quant à $f(p)$, c'est un nombre positif, décroissant indéfiniment quand p augmente, et tel que la série

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(p) + \ldots$$

soit convergente.

Cela posé, considérons dans l'intervalle (a, b) deux nombres (x_0, X) et divisons leur intervalle en n autres. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les plus grandes valeurs de la fonction dans chacun de ces intervalles. La somme Ω_n des oscillations de la fonction dans les n intervalles est au plus égale à $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Or, parmi les fractions y_r, considérons celles dont le dénominateur est p ; leur nombre n_p est inférieur ou égal à N_p. Par conséquent, on a

$$\Omega_n < y_1 + y_2 + \ldots + y_n < \sum_p \frac{n_p}{N_p} f(p).$$

Cette dernière série étant convergente, l'oscillation totale Ω_n est limitée, et la fonction $f(x)$ est intégrable. Pour calculer l'intégrale

$$(x_1 - x_0)\psi(\xi_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\psi(\xi_n),$$

on peut choisir arbitrairement les valeurs intermédiaires ξ. Or, d'après la loi de formation de $\psi(x)$, il existe dans tout intervalle, si petit qu'il soit, des valeurs ξ pour lesquelles la fonction a une valeur inférieure à tout nombre donné, si petit qu'il soit : ce sont les fractions ξ dont le dénominateur p est suffisamment grand. En employant ces fractions, on voit que l'intégrale de $\psi(x)$ est nulle.

II. — Propriétés des intégrales.

2. Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ est finie dans l'intervalle (a, b) et intégrable dans tout intervalle (x_0, X) intérieur au précédent, son intégrale prise entre x_0 et X est une fonction continue de X dans tout l'intervalle (a, b).*

Il suit de la définition de l'intégrale que, si M est la limite supérieure et m la limite inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (x_0, X), on a [1]

$$M(X - x_0) > \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > m(X - x_0).$$

On voit aussi bien aisément que, si $X + h$ est compris entre a et b, on a toujours

$$\int_{x_0}^{X+h} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{X+h} f(x)\,dx,$$

quel que soit l'ordre dans lequel se présentent les trois nombres x_0, X et $X + h$, quand on les range par ordre de grandeur croissante.

Cela posé, la différence

$$F(X+h) - F(X) = \int_{x_0}^{X+h} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{X}^{X+h} f(x)\,dx$$

---

[1] Cette double inégalité permet d'écrire

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \mu(X - x_0),$$

μ étant un certain nombre intermédiaire entre les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(x_0 X)$.

est inférieure à $M'h$ et supérieure à $m'h$, M' et m' étant les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ entre X et $X+h$, ce qui prouve déjà que l'intégrale F(X) est *continue pour toute valeur* X, comprise entre a et b.

Mais, si l'on appelle M_0 et m_0 les limites de $f(x)$ pour tout l'intervalle (a, b), on peut écrire, *a fortiori,*

$$M_0 h > F(X+h) - F(X) > m_0 h,$$

et comme M_0 et m_0 ne dépendent pas de X, il suit de là que F(X) est une fonction *continue de* X *dans tout l'intervalle* (a, b).

3. Théorème. — *Toute intégrale est une fonction continue à oscillation totale limitée.*

Divisons, en effet, l'intervalle (x_0, X) en n autres par les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et posons

$$y_r = \int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx, \qquad Y = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Nous allons calculer la somme

$$\sigma_n = |y_1| + |y_2 - y_1| + \ldots + |Y - y_{n-1}|,$$

et montrer qu'elle est limitée, quels que soient le nombre n des intervalles partiels et leur loi de formation. On a, en effet,

$$y_{r+1} - y_r = \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x)\,dx,$$

et ce nombre est compris entre $M_0(x_{r+1} - x_r)$ et $m_0(x_{r+1} - x_r)$. Si donc on désigne par μ la plus grande des deux valeurs absolues de M_0 et de m_0, la somme considérée est moindre que $\mu(X - x_0)$, ce qui établit notre lemme.

Maintenant, dans l'intervalle (x_r, x_{r+1}) on peut trouver deux nombres ξ, ξ'_r, auxquels correspondent, pour l'intégrale F(X), deux valeurs, dont l'une η_r diffère de moins de $\varepsilon : 2$ de la limite supérieure de F(X) dans l'intervalle en question, et l'autre η'_r diffère de moins de $\varepsilon : 2$ de la limite inférieure. Par suite $|\eta_r - \eta'_r|$ diffère de moins de ε de l'oscillation ω_r de F(X) dans ce même

intervalle, et l'on peut écrire

$$|\eta_r - \eta'_r| = \omega_r - \theta_r \varepsilon \qquad (-1 < \theta_r < 1).$$

Ainsi, la somme des oscillations ω_r est représentée par

$$\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{n-1} = |\eta_0 - \eta'_0| + |\eta_1 - \eta'_1| + \ldots + \varepsilon \Sigma \theta_r.$$

Or, le coefficient de ε est au plus égal à n, et n étant fixé, on peut, d'après la définition du nombre ε, prendre ce nombre assez petit pour que $n\varepsilon$ soit aussi petit qu'on veut. Pour établir que l'oscillation totale de $F(X)$ est limitée, il suffit donc de prouver qu'il en est de même de la somme

$$|\eta_0 - \eta'_0| + |\eta_1 - \eta'_1| + \ldots.$$

Comparons celle-ci à la somme

$$|\eta_0 - \eta'_0| + |\eta'_0 - \eta_1| + |\eta_1 - \eta'_1| + |\eta'_1 - \eta_2| + \ldots,$$

dans laquelle les valeurs η_0, η'_0, η_1, η'_1 de l'intégrale correspondent, dans l'ordre où elles sont écrites, à des valeurs *croissantes* de x. C'est là une somme telle que σ_n et qui, à ce titre, est limitée. Or, la proposée s'en déduit par suppression des termes de rang impair; elle est donc à plus forte raison limitée, d'où suit la conclusion annoncée.

4. Il ne faudrait pas croire que l'intégrale d'une fonction $f(x)$ ait en général une dérivée, et que cette dérivée soit $f(x)$. Nous avons, en effet, formé précédemment (n° 1) une fonction $\psi(x)$ dont l'intégrale est constamment nulle et a, par conséquent, une dérivée nulle, qui ne peut se confondre avec $\psi(x)$.

Voici un cas important dans lequel une fonction $f(x)$ est la dérivée de son intégrale :

Théorème. — *Toute fonction continue dans un intervalle est la dérivée de son intégrale; de plus, cette intégrale est une fonction uniformément différentiable.*

Pour le démontrer, rappelons l'inégalité obtenue plus haut

$$M'h > \int_{x_0}^{X+h} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > m'h,$$

où M′ et m' sont les limites supérieures et inférieures de $f(x$ dans l'intervalle $(X, X+h)$. Or dans cet intervalle il existe deux valeurs ξ et ξ' telles qu'on ait

$$f(\xi) > M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(\xi') < m + \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant une fraction donnée, aussi petite qu'on veut. Mais, puisque $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), on peut assigner un nombre α *indépendant de* X et tel que, si $|h| < \alpha$, on ait

$$|f(\xi) - f(X)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(\xi') - f(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ces inégalités et des précédentes on conclut

$$\left| \frac{F(X+h) - F(X)}{h} - f(X) \right| < \varepsilon,$$

ce qui prouve à la fois que F(X) admet pour dérivée $f(X)$, et que cette fonction est uniformément différentiable, puisque α est indépendant de X.

III. — Fonctions primitives.

5. Nous sommes maintenant en mesure de répondre à cette question : *Étant donnée une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), existe-t-il une fonction $F(x)$ dont elle soit la dérivée?*

Nous voyons qu'il existe une telle fonction. C'est l'intégrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx,$$

x_0 étant un nombre quelconque appartenant comme x à l'intervalle (a, b). On appelle *fonction primitive de $f(x)$* une fonction dont $f(x)$ est la dérivée. Une fonction continue $f(x)$ a donc au moins une fonction primitive. Si l'on représente toute fonction primitive de $f(x)$ par

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + \varphi(x),$$

on voit que $\varphi(x)$ est assujettie à la seule condition d'avoir une dérivée constamment nulle. Or nous avons donné (Chap. V, n° 6) le moyen de former une infinité de fonctions $\varphi(x)$ jouissant de cette propriété. Ainsi *toute fonction continue a une infinité de fonctions primitives.*

Mais, si l'on astreint la fonction primitive de $f(x)$ à être uniformément différentiable, comme l'intégrale de $f(x)$ l'est elle-même, il faudra que $\varphi(x)$ soit uniformément différentiable. Or nous avons montré (Chap. VI, n° 6) qu'une fonction uniformément différentiable, dont la dérivée est nulle, se réduit à une constante. D'où cette conclusion :

Toutes les fonctions primitives, uniformément différentiables, d'une fonction continue $f(x)$ rentrent dans le type

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \text{const.}$$

Ce théorème [1] fait dépendre, dans certains cas, l'évaluation d'une intégrale de la connaissance d'une fonction primitive. En effet, si $f(x)$ est une fonction continue, et si l'on en connaît une fonction primitive *uniformément différentiable* $F(x)$, on aura immédiatement

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0).$$

On peut remarquer, à ce sujet, que la fonction primitive n'est point *limitée* comme l'intégrale; elle peut, en effet, à cause de la constante entièrement arbitraire qu'elle contient, acquérir une valeur absolue *aussi grande qu'on veut,* tandis que, la fonction $f(x)$ n'étant définie que dans l'intervalle (a, b), toute intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

dont la limite supérieure est donnée et appartient, ainsi que la

---

[1] On pourrait, dans l'énoncé de cette proposition, omettre la propriété de $f(x)$ d'être *continue.* On sait, en effet (Chap. VI, n° 1), que la dérivée d'une fonction uniformément différentiable dans un intervalle est continue dans cet intervalle.

limite inférieure, à l'intervalle (a, b), est nécessairement comprise entre deux nombres qu'on peut assigner.

IV. — Extension de la notion d'intégrale.

6. *Cas d'une limite infinie.* — Considérons une fonction $f(x)$, intégrable entre x_0 et X, quelque grand que soit le nombre X, supposé, par exemple, positif. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ des nombres qui vont en croissant constamment et indéfiniment avec leur indice, et cela *suivant une loi quelconque.* Si les valeurs correspondantes de l'intégrale

$$I_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx, \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

forment une suite convergente, nous dirons que la fonction $f(x)$ *est intégrable entre x_0 et $+\infty$*, ou encore que *le symbole*

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

a un sens. Il représentera, par définition, l'un des termes de la suite $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ à partir d'un rang suffisamment élevé.

Dans tout autre cas, on dit que ce symbole n'a pas de sens.

Remarque. — Il n'est nullement nécessaire, pour que les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ existent et forment une suite convergente, que les nombres

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

forment eux-mêmes une suite convergente, quelle que soit la loi suivant laquelle grandissent les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Mais si, quelle que soit cette loi, la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots$ est convergente, cette suite a nécessairement pour limite zéro. Si, en effet, ses termes, à partir d'un certain rang n, étaient, par exemple, supérieurs à un nombre positif l, on aurait

$$I_{n+r} = \int_{x_0}^{x_{n+r}} f(x)\,dx > l(x_{n+r} - x_0 \qquad (r = 1, 2, \ldots);$$

donc les intégrales qui suivent I_n dépasseraient tout nombre assignable.

Exemple. — Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^m},$$

où m est une fraction positive. On connaît une fonction primitive *uniformément différentiable* de $f(x)$, savoir :

$$\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{x^{m-1}}.$$

On a donc (n° 5)

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{1-m}\left(\frac{1}{X^{m-1}} - \frac{1}{x_0^{m-1}}\right).$$

Faisant croître X indéfiniment, on reconnaît que les intégrales $I_1, I_2, \ldots$ forment une suite convergente, si $m > 1$; que, au contraire, elles croissent indéfiniment en valeur absolue, si $m < 1$. La conclusion est la même pour $m = 1$, parce qu'alors on a

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \log X - \log x_0.$$

En conséquence, pour $m > 1$, on a

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{(m-1)x_0^{m-1}}.$$

Si, au contraire, m est inférieur ou égal à 1, le symbole écrit au premier membre n'a pas de sens.

Nous n'insisterons pas sur la règle bien connue qu'on déduit de là pour reconnaître si certaines intégrales à limite infinie ont ou n'ont pas de sens.

7. *Cas où la fonction à intégrer devient infinie.* — Nous n'avons défini l'intégrale (Chap. III, n° 1) que pour les fonctions finies. Il y a intérêt à rechercher si le procédé de l'intégration peut s'étendre aux fonctions qui deviennent infinies. Une fonction $f(x)$ étant définie dans l'intervalle (a, b), supposons qu'il existe dans cet intervalle une suite convergente de nombres

croissants

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots$$

tels que la suite $f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_n), \ldots$ soit divergente, ses termes grandissant indéfiniment en valeur absolue avec n. Nous allons prouver que le procédé sommatoire n'est applicable à cette fonction dans aucun intervalle (x_0, X) compris dans (a, b) et comprenant la suite $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$.

Divisons, en effet, l'intervalle (x_0, X) en m autres intervalles, aussi nombreux qu'on voudra, et formons la somme

$$\mathrm{S}_m = \sum_0^{m-1} f(\xi_r)(x_{r+1} - x_r), \qquad (x_m = \mathrm{X}),$$

où ξ_r est un nombre intermédiaire entre x_r et x_{r+1}. Mettons en évidence le *dernier* intervalle (x_k, x_{k+1}) qui contient des termes de la suite $x'_1, x'_2, \ldots$. Nous pourrons écrire

$$\mathrm{S}_m = \sum_0^{k-1} f(\xi_r)(x_{r+1} - x_r) + f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k+1}^{m-1} f(\xi_r)(x_{r+1} - x_r).$$

Aucun des intervalles qui figurent dans la seconde somme ne comprenant de termes de la suite (x'), on pourra calculer la valeur numérique B de cette somme, comme la valeur numérique A de la première, quand on se sera donné le mode de fractionnement et les valeurs intermédiaires ξ_r, que nous supposerons toutes fixées, excepté ξ_k. Or x_r et x_{k+1}, étant choisis, si voisins d'ailleurs que soient ces deux nombres, on peut assigner entre eux un terme x'_p de la suite $x'_1, \ldots$, tel que $f(x'_p)$ et, par suite, $f(x'_p)(x_{k+1} - x_k)$, soit aussi grand qu'on veut, plus grand, par exemple, que N fois la somme $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$. En prenant $\xi_k = x'_p$ on voit que la somme S_m sera aussi grande qu'on voudra. C'est ce que nous exprimerons en disant que la fonction $f(x)$ *n'est pas intégrable*.

Remarquons la généralité de l'hypothèse sur laquelle est fondée la démonstration : il suffit qu'il existe *une* suite $x'_1, x'_2, \ldots$ telle que les termes de la suite correspondante $f(x'_1), f(x'_2), \ldots$ croissent indéfiniment en valeur absolue. Toute autre suite équivalente peut ne pas jouir de la même propriété.

8. Appliquons ces considérations à des exemples :

1° Soit d'abord la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Elle devient aussi grande qu'on veut quand x prend des valeurs positives suffisamment voisines de zéro. Cette fonction n'est donc pas intégrable dans l'intervalle $(0, X)$, X étant un nombre positif quelconque. Elle admet une fonction primitive $2\sqrt{x}$ qui reste finie pour $x = 0$.

2° Considérons la fonction

$$F(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x} \qquad (1 < \alpha < 2).$$

Cette fonction admet une dérivée

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}.$$

Il est visible que $f(x)$ devient aussi grande qu'on veut quand x est suffisamment voisin de zéro. Elle n'est donc pas intégrable dans l'intervalle $(0, X)$, X étant un nombre positif quelconque. Elle admet une fonction primitive $F(x)$ qui reste finie pour $x = 0$.

Contrairement à ce qui arrivait dans l'exemple précédent, la fonction $f(x)$ est ici parfaitement déterminée pour $x = 0$ qui lui fait acquérir la valeur zéro (Chap. VI, n° 1, *Remarque*). De plus, toute suite de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro ne rend pas $f(x)$ de plus en plus grande, puisque $f(x'_n)$ reste finie pour toutes les valeurs

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi_r}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$\frac{\pi_r}{2}$ étant un terme de la suite convergente qui définit la plus petite racine positive de l'équation $\cos z = 0$, terme dont l'indice r croît de plus en plus avec n. On a donc là un exemple de la propriété que nous signalions tout à l'heure.

Les deux fonctions que nous venons de reconnaître comme n'étant intégrables dans aucun intervalle $(0, X)$ admettent des

fonctions primitives qui restent finies pour $x = 0$. Il n'y a point là de contradiction avec ce que nous avons vu plus haut (nos 4 et 5). Nous n'avons, en effet, établi de relation entre la fonction primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ et son intégrale qu'en supposant $F(x)$ uniformément différentiable et, par suite, $f(x)$ continue dans l'intervalle considéré; or, dans nos exemples, il n'en est pas ainsi.

9. Bien qu'une fonction qui devient infinie dans un intervalle (ou à l'une de ses extrémités) ne soit pas intégrable dans cet intervalle, on est conduit par les applications, et notamment par la quadrature des aires planes, à établir une distinction entre les fonctions de cette espèce, au point de vue de l'intégrabilité, et à étendre cette notion à certaines d'entre elles.

Supposons que, dans l'intervalle (a, b), il existe une suite *convergente*

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \ldots$$

telle que la suite correspondante

$$f(\xi_1), \quad f(\xi_2), \quad \ldots, \quad f(\xi_n), \quad \ldots$$

contienne des termes plus grands en valeur absolue que tout nombre assignable. Considérons deux suites *équivalentes* à la suite ξ_n et composées, l'une de nombres *croissants,*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

l'autre de nombres *décroissants,*

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots.$$

Il peut se faire que $f(x)$ soit intégrable entre a et x_n et aussi entre x'_n et b, quelque grand que soit n. Nous poserons alors

$$I_n = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad J_n = \int_{x'_n}^b f(x)\,dx,$$

et nous formerons les deux suites :

$$(i) \qquad I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_n, \quad \ldots,$$
$$(j) \qquad J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_n, \quad \ldots.$$

Si elles sont *toutes les deux convergentes* et si *toutes* les suites, qu'on obtient en remplaçant dans les intégrales I les limites supérieures par des nombres formant une suite équivalente à la suite des x_n, sont *équivalentes à la suite* (i); si, de même, toutes les suites, qu'on obtient en remplaçant dans les intégrales J les limites inférieures par des nombres formant une suite équivalente à la suite des x'_n, sont équivalentes à la suite (j), *nous dirons* que la fonction $f(x)$ est *intégrable entre a et b* et que son intégrale est l'un quelconque des termes de la suite

$$I_1 + J_1, \quad I_2 + J_2, \quad \ldots, \quad I_n + J_n, \quad \ldots,$$

à partir d'un rang suffisamment élevé.

10. *Exemple.* — Donnons-nous la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^m},$$

où m est un exposant positif. Elle devient infinie pour $x = 0$; mais si x_0 et b sont deux nombres positifs, on a (n° 6)

$$J = \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{1-m}\left(\frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{x_0^{m-1}}\right).$$

Faisant décroître x_0 indéfiniment, suivant une loi *quelconque*, on voit que, si $m < 1$, l'intégrale J tend vers la valeur de son premier terme. Nous dirons donc que la fonction x^{-m} est intégrable entre o et b ou que le symbole

$$\int_0^b \frac{dx}{x^m}$$

a un sens et que sa valeur est

$$\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{b^{m-1}}.$$

Ce résultat permet de décider si certaines intégrales, de forme analogue, ont un sens.

V. — Intégrales singulières.

11. Supposons qu'une fonction de deux variables $f(x, \alpha)$ soit intégrable par rapport à x lorsqu'on attribue à α une valeur constante. L'intégrale

$$J = \int_a^{x_1} f(x, \alpha)\, dx$$

définit une fonction de x_1 qui change d'ailleurs quand on change α. Mais certaines fonctions $f(x, \alpha)$ présentent une particularité remarquable : si L est la valeur de J pour une certaine valeur de x_1, en relation avec la limite inférieure a, on peut disposer de α de manière que l'intégrale J reste égale à L quand on change sa limite supérieure. En termes plus précis, s'étant donné arbitrairement x_1, ainsi qu'une fraction positive ε aussi petite qu'on veut, on peut déterminer un nombre α_1 tel que, sous la seule condition

$$|\alpha| > |\alpha_1|,$$

on ait l'inégalité

$$\left| \int_a^{x_1} f(x, \alpha)\, d\alpha - L \right| < \varepsilon ;$$

en outre, une fois α *fixé* de la sorte, cette inégalité subsiste si l'on remplace x_1 par une série d'autres nombres plus éloignés de la limite inférieure a. On dit alors que l'intégrale considérée est une *intégrale singulière*.

Voici une importante intégrale de cette espèce qui intervient dans la démonstration de la célèbre formule de Fourier. C'est l'intégrale

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx.$$

Le symbole soumis au signe d'intégration n'ayant pas de sens pour $x = 0$, *nous conviendrons qu'il représente* α *quand* x *est nul*. Grâce à cette convention, la fonction considérée est *continue* de $x = 0$ à $x = x_1$, y compris la limite inférieure. Le nombre α est un entier positif *impair*.

Pour obtenir la valeur remarquable L, propre à cette intégrale,

nous lui donnerons comme limite supérieure l'un des termes $\frac{\pi_n}{2}$ de la suite convergente qui définit la plus petite racine positive de l'équation

$$\cos x = 0.$$

En faisant usage de la formule connue

$$\frac{\sin \alpha x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos(\alpha - 1)x,$$

nous aurons

$$\int_0^{\frac{\pi_n}{2}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi_n}{2} + \ldots,$$

la somme des termes non écrits pouvant être rendue, quand n est suffisamment grand, moindre qu'une fraction donnée ε. Si l'on suppose cette fraction inférieure à la plus petite quantité qu'on est convenu de conserver dans chaque calcul particulier et qu'on remplace π_n par le symbole plus simple π, on aura

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant la limite supérieure x_1 de l'intégrale J va être supposée *quelconque* dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi_n}{2}\right)$; il serait facile d'étendre la démonstration au cas où x_1 serait négatif et compris dans l'intervalle symétrique. Pour calculer J, nous diviserons l'intervalle $(0, \pi_n)$ en α intervalles consécutifs égaux; x_1 est situé dans l'un de ces intervalles, le $m^{\text{ième}}$ par exemple : on aura

$$(m-1)\frac{\pi_n}{\alpha} < x_1 < m\frac{\pi_n}{\alpha}.$$

Comme on peut d'ailleurs écrire

$$\int_0^{x_1} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi_n}{2}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx - \int_{x_1}^{\frac{\pi_n}{2}} \frac{\sin \alpha x}{\sin x}\, dx,$$

nous décomposerons la dernière intégrale du second membre en

plusieurs autres, au moyen des nombres croissants

$$x_1, \quad m\frac{\pi_n}{\alpha}, \quad (m+1)\frac{\pi_n}{\alpha}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha-1}{2}\frac{\pi_n}{\alpha}, \quad \frac{\pi_n}{2},$$

ce qui nous donnera

$$J = \frac{\pi_n}{2} + \theta\varepsilon - \int_{x_1}^{m\frac{\pi_n}{\alpha}} - \int_{m\frac{\pi_n}{\alpha}}^{(m+1)\frac{\pi_n}{\alpha}} - \ldots - \int_{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\pi_n}{\alpha}}^{\frac{\pi_n}{2}} \qquad (-1 < \theta < 1),$$

l'élément différentiel étant sous-entendu pour abréger l'écriture. Il est très facile de voir que, si l'indice n est suffisamment grand, les diverses intégrales qui figurent au second membre ont des signes alternés et des valeurs absolues décroissantes, à partir de la seconde. Leur somme sera donc en valeur absolue inférieure à tout nombre surpassant les modules des deux premières intégrales. Or on a

$$\left|\int_{x_1}^{m\frac{\pi_n}{\alpha}} \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\,dx\right| < \left|\int_{x_1}^{m\frac{\pi_n}{\alpha}} \frac{\sin\alpha x}{\sin x_1}\,dx\right| < \frac{1}{\sin x_1}\left|\int_{(m-1)\frac{\pi_n}{\alpha}}^{m\frac{\pi_n}{\alpha}} \sin\alpha x\,dx\right|.$$

Mais la valeur absolue de la dernière intégrale est

$$\frac{1}{\alpha}\left|\cos m\pi - \cos(m-1)\pi\right| = \frac{2}{\alpha}.$$

Ce résultat étant indépendant de m, on voit que l'on a

$$\left|\int_{x_1}^{m\frac{\pi_n}{\alpha}} \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\,dx\right| < \left|\int_{m\frac{\pi_n}{\alpha}}^{(m+1)\frac{\pi_n}{\alpha}} \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\,dx\right| < \frac{2}{\alpha\sin x_1},$$

d'où résulte

$$\left|\int_0^{x_1} \frac{\sin\alpha x}{\sin x}\,dx - \frac{\pi_n}{2}\right| < \frac{2}{\alpha\sin x_1}.$$

On peut donc, étant donné x_1, déterminer α de manière que la différence considérée ait un module moindre que toute fraction positive ε, si petite qu'elle soit; et le module de cette différence restera inférieur à ε si, conservant la valeur trouvée pour α, l'on

remplace la limite supérieure de J par un nombre plus grand que x_1, mais toujours inférieur à $\frac{\pi_n}{2}$.

12. Voici maintenant un important théorème relatif aux intégrales singulières; il sert de fondement à la démonstration de la formule de Fourier.

THÉORÈME. — *Si $f(x)$ est une fonction à oscillation totale limitée dans un intervalle (a, b), et si, le nombre x_1 appartenant à cet intervalle, l'intégrale*

$$\int_a^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx$$

est une intégrale singulière, on a

$$\int_a^{x_1} f(x)\, \varphi(x, \alpha)\, dx = f(a+0) \int_a^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx,$$

en désignant par $f(a+0)$ la valeur que la fonction $f(x)$ acquiert quand x tend vers a par valeurs décroissantes.

Formons, en effet, une suite quelconque de nombres décroissants $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, qui ait a pour limite, et posons, pour abréger,

$$f(x_r) = y_r, \qquad \varphi(x_r, \alpha)(x_{r-1} - x_r) = \eta_r.$$

D'après la définition de l'intégrale, nous aurons, pour n très grand,

$$\int_a^{x_1} f(x)\, \varphi(x, \alpha)\, dx = \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \ldots + \eta_r y_r + \ldots + \eta_n y_n.$$

Or, le second membre peut s'écrire

$$y_n(\eta_n + \ldots + \eta_2) + (y_{n-1} - y_n)(\eta_{n-1} + \ldots + \eta_2) + \ldots + (y_2 - y_3)\, \eta_2.$$

Mais, par définition, on a

$$y_n = f(a+0), \qquad \eta_n + \ldots + \eta_2 = \int_a^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx.$$

Il vient donc

$$\int_a^{x_1} f(x)\, \varphi(x, \alpha)\, dx = f(a+0) \int_a^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx + R_n,$$

si l'on pose

$$\begin{aligned} R_n = (y_{n-1} - y_n)(\eta_{n-1} + \ldots + \eta_2) + \ldots \\ + (y_r - y_{r+1})(\eta_r + \ldots + \eta_2) + \ldots + (y_2 - y_3)\eta_2. \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ ayant une oscillation totale limitée, la série

$$|y_2 - y_3| + \ldots + |y_r - y_{r+1}| + \ldots$$

est convergente, puisque ses divers termes sont au plus égaux à l'oscillation de $f(x)$ dans chaque intervalle partiel. On peut donc, se donnant la fraction positive ε, aussi petite qu'on veut, prendre r suffisamment grand pour vérifier l'inégalité

$$|y_r - y_{r+1}| + \ldots + |y_{n-1} - y_n| < \varepsilon.$$

Dès lors, la partie de R_n qui correspond à cette somme est évidemment inférieure à εM, M étant un nombre supérieur aux valeurs absolues de l'intégrale

$$\int_{x_s}^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha,$$

pour x_s compris entre a et x_1.

Évaluons maintenant la seconde partie du reste

$$(y_{r-1} - y_{r-2})(\eta_{r-1} + \ldots + \eta_2) + \ldots + (y_2 - y_3)\eta_2.$$

L'indice r étant fixé, je puis choisir α assez grand pour que la somme

$$\eta_{r-1} + \ldots + \eta_2 = \int_{x_{r-1}}^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^{x_r} \varphi\, dx - \int_a^{x_{r-1}} \varphi\, dx$$

soit moindre que ε. Une fois α choisi de cette manière, il en sera de même des sommes analogues $(\eta_{r-2} + \ldots + \eta_2)$, ..., qui s'expriment par des intégrales dont les limites supérieures x_{r-2}, ..., sont des nombres plus grands que x_{r-1}. En conséquence, si Ω est l'oscillation totale de $f(x)$ dans l'intervalle (a, x_1), la partie du reste que nous étudions est en valeur absolue moindre que $\varepsilon\Omega$. On a donc finalement

$$\left| \int_a^{x_1} f(x)\, \varphi(x, \alpha)\, dx - f(a + 0) \int_a^{x_1} \varphi(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon M + \varepsilon\Omega,$$

ce qui démontre la proposition énoncée, puisque ε est arbitraire et aussi petit qu'on veut.

La limite inférieure des valeurs de α pour lesquelles cette inégalité a lieu dépend, bien entendu, de ε; elle finit par être d'autant plus élevée que ε est plus petit.

VI. — Formule de Fourier.

13. Nous allons montrer qu'*une fonction $f(x)$, qui, dans un intervalle $(-l, l)$, d'amplitude au plus égale à 2π, a son oscillation totale limitée et n'admet qu'un nombre fini de discontinuités, est représentable dans tout cet intervalle par une série trigonométrique*

$$A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \ldots,$$

dont les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} f(u)\,du,$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(u)\cos mu\,du,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(u)\sin mu\,du.$$

Pour tout nombre x auquel correspond un saut brusque de la fonction, la série est égale à la demi-somme des valeurs $f(x+0)$ et $f(x-0)$ que la fonction acquiert quand la variable tend vers le nombre x, soit par valeurs décroissantes, soit par valeurs croissantes.

En effet, prenons $2m+1$ termes dans la série trigonométrique et appelons S_m leur somme. Nous aurons

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m (\cos nx \cos nu + \sin nx \sin nu)\right] du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos n(u-x)\right] du.$$

Mais nous avons rappelé précédemment (n° **11**) la formule

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{m}\cos n(u-x)=\frac{\sin(2m+1)\dfrac{u-x}{2}}{2\sin\dfrac{u-x}{2}}.$$

Si l'on pose pour simplifier

$$2m+1=p,\qquad \frac{u-x}{2}=z,$$

il n'y a qu'à tenir compte de ce changement de notation et de variable pour trouver

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}^{+\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}f(x+2z)\frac{\sin pz}{\sin z}\,dz.$$

Remarquons que la valeur $z=0$ est comprise entre les deux limites de l'intégrale. Nous pouvons donc remplacer cette intégrale par les deux suivantes :

$$\int_{-\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}^{0}f(x+2z)\frac{\sin pz}{\sin z}\,dz+\int_{0}^{+\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}f(x+2z)\frac{\sin pz}{\sin z}\,dz,$$

qui se réduisent à une intégrale singulière étudiée plus haut (n° **11**), quand on y fait abstraction du facteur $f(x+2z)$ et qu'on suppose l inférieur ou au plus égal à π_n.

Or, d'après ce qui a été dit précédemment (n° **12**), on peut choisir p assez grand et prendre dans la suite $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ un terme π de rang assez élevé pour satisfaire aux inégalités

$$\left|\int_{0}^{\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}f(x+2z)\frac{\sin pz}{\sin z}\,dz-\frac{\pi}{2}f(x+0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{-\frac{l}{2}-\frac{x}{2}}^{0}f(x+2z)\frac{\sin pz}{\sin z}\,dz-\frac{\pi}{2}f(x-0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

où les symboles $f(x+0)$, $f(x-0)$ ont le sens précisé à l'endroit cité.

Les explications que nous avons données à ce sujet nous permettraient même d'assigner la valeur que doit prendre l'entier p, c'est-à-dire m, et le nombre de décimales avec lesquelles il faut

calculer π pour qu'il en soit ainsi. Nous aurons donc

$$\frac{\pi}{2} S_m = \frac{\pi}{2} [f(x+0) + f(x-0)] + \theta\varepsilon \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Si, pour la valeur considérée x, la fonction $f(x)$ est continue, on pourra écrire, en désignant par $S(x)$ la série trigonométrique,

$$S(x) = f(x).$$

Si, pour cette valeur, $f(x)$ est discontinue, la discontinuité ne peut être qu'un saut brusque (Chap. III, n° 10), et il vient

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)],$$

les symboles $f(x+0)$, $f(x-0)$ ayant ici le sens qui leur a été attribué dans l'énoncé du présent théorème.

Remarque. — Si une fonction à oscillation totale limitée est définie entre $-l$ et $+l$, elle peut être, entre deux limites plus rapprochées $(-\lambda, +\lambda)$, représentée d'une infinité de manières par une série trigonométrique. Soit, en effet, γ un nombre quelconque, compris entre λ et l. Il est évident, d'après ce qui précède, que $f(x)$ peut être représentée par une série de Fourier dans laquelle les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} f(u)\, du,$$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} f(u) \cos mu\, du,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} f(u) \sin mu\, du;$$

ce qui donne autant de développements qu'on veut, γ étant un nombre arbitraire, assujetti à la seule condition d'être compris entre λ et l. Chacun de ces développements représentera la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(-\lambda, +\lambda)$.

CHAPITRE X.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES ET APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Diverses questions de la théorie des fonctions d'une variable exigent, pour être traitées rigoureusement, qu'on se réfère à certaines propriétés des fonctions de deux ou plusieurs variables indépendantes. Nous réunissons dans un même Chapitre les premières notions relatives à ces fonctions et l'exposé des questions qui en dépendent : fonctions composées, fonctions implicites, intégration de l'équation différentielle du premier ordre.

I. — Définition d'une fonction de deux variables.

1. Nous disons qu'un couple de nombres x, y appartient à la région $(x_0, y_0; X, Y)$ si x est compris entre x_0 et X et y entre y_0 et Y. Si, à un couple quelconque de nombres x, y appartenant à une certaine région, on fait correspondre soit un nombre z, soit une suite convergente $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, ce nombre z ou l'un quelconque des termes de la suite, à partir d'un rang suffisamment éloigné, sera dit une *fonction* des deux *variables* x et y et désigné par le symbole $f(x, y)$.

Il est toujours entendu (*Cf.* Chap. II, n° 3) que $f(x, y)$ ne dépend que des valeurs x, y elles-mêmes, non de la forme sous laquelle on pourrait les donner; c'est-à-dire que, si x et x' sont deux fractions équivalentes, ainsi que y et y', on a nécessairement

$$f(x, y) = f(x', y').$$

Ajoutons que toute suite $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$ équivalente à la première est, aussi bien que celle-ci, propre à définir la fonction. Si, à partir d'un certain rang, les nombres d'une des deux suites ne

pouvaient être substitués les uns aux autres dans les calculs, ni l'une ni l'autre de ces suites ne pourrait être regardée comme définissant une fonction.

II. — Continuité des fonctions de deux variables.

2. Les fonctions de deux variables qu'il y a le plus d'intérêt à considérer sont les fonctions *continues*. Mais la continuité de pareilles fonctions peut être entendue de diverses manières.

On dit que $f(x, y)$ est une fonction continue *pour* chaque couple x, y de nombres appartenant à une région $(x_0, y_0; X, Y)$ si, se donnant une fraction positive ε, d'ailleurs aussi petite qu'on voudra, on peut déterminer un nombre α tel que les deux seules conditions

$$|h| < \alpha, \quad |k| < \alpha$$

entraînent l'inégalité

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Il est bien entendu que l'on doit, dans la suite convergente qui définit $f(x,y)$, prendre des termes assez éloignés du premier pour que tous ceux qui les suivent vérifient cette même inégalité.

En général, α dépend des valeurs considérées x et y. Quand il n'en dépend pas et qu'il est conséquemment le même pour tous les couples x, y appartenant à une région $(x_0, y_0; X, Y)$, la fonction f est dite continue *dans* toute cette région. Il faut bien distinguer ces deux sortes de continuité, dont la seconde est évidemment plus particulière que la première [1].

Quand une fonction de deux variables est continue *pour* chaque couple de nombres appartenant à une région $(x_0, y_0; X, Y)$, elle devient, quand on y fixe y, une fonction de x continue *pour* chaque valeur appartenant à l'intervalle (x_0, X); c'est de même une fonction continue *pour* chaque valeur y quand x est fixé. Pareillement, si une fonction de deux variables est continue *dans* toute la région $(x_0, y_0; X, Y)$, elle devient une fonction de x,

---

[1] Dans la théorie classique, au contraire, ces deux modes de continuité se ramènent l'un à l'autre.

continue *dans* l'intervalle (x_0, X), quand y conserve une valeur constante, d'ailleurs quelconque entre y_0 et Y. C'est aussi une fonction de y continue *dans* l'intervalle (y_0, Y), quand x est fixé entre x_0 et X.

Mais les réciproques de ces propositions évidentes ne sont pas exactes. C'est ce que prouve l'exemple de la fonction

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f(0, 0) = 0;$$

car $f(x, y)$ est dans la région $(0, 0; X, Y)$ une fonction continue de x quand on fixe y et une fonction continue de y quand c'est x qui reste constant. Cependant $f(x, y)$ n'est pas une fonction continue *dans* la région considérée : elle prend dans une région $(0, 0; \varepsilon, \varepsilon)$, quelque petite qu'on la suppose, toutes les valeurs comprises entre $-1:2$ et $1:2$. En effet, dans une telle région, le rapport

$$\frac{y}{x} = t$$

prend toutes les valeurs possibles; par conséquent la fraction

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

prend toutes les valeurs comprises entre son minimum $-1:2$ et son maximum $1:2$.

3. Il faut maintenant appeler l'attention sur une espèce de continuité des fonctions de deux variables qui n'a pas d'analogue dans les fonctions d'une variable. Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction continue *pour* chaque valeur de x quand on attribue à y une valeur constante, d'ailleurs quelconque. On peut alors déterminer un nombre positif α tel que, sous la seule condition

$$|h| < \alpha,$$

on ait l'inégalité

$$|f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

En général, α dépend à la fois de x et de y. Quand il ne dépend pas de x, la fonction est dite *uniformément continue par rapport à x pour* la valeur considérée de y; quand α ne dépend pas

de x, ni de y, la fonction est dite *uniformément continue par rapport à x, quel que soit y*. Cette propriété de certaines fonctions est d'un grand intérêt : elle intervient dans la démonstration des propositions les plus importantes du Calcul intégral.

4. Une proposition analogue à celle que nous avons établie pour les fonctions d'une seule variable (Chap. III, n° 6) relie la convergence des suites à la continuité des fonctions de deux (ou de plusieurs) variables *dans* une région donnée.

THÉORÈME. — *Étant données une première suite convergente quelconque*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

appartenant à l'intervalle (x_0, X), *et une seconde suite convergente, également quelconque,*

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_r, \quad \ldots,$$

si la suite

$$(1) \qquad f(x_n, y_r), \quad f(x_{n_1}, y_{r_1}), \quad f(x_{n_2}, y_{r_2}), \quad \ldots,$$

dont les arguments sont pris dans les deux précédentes, les indices n, n_1, n_2, ..., r, r_1, r_2, ... allant en croissant, est convergente, la fonction $f(x, y)$ est continue dans toute la région $(x_0, y_0; \mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Réciproquement, *si la fonction $f(x, y)$ est continue dans toute la région considérée, la suite*

$$f(x_n, y_r), \quad f(x_{n_1}, y_{r_1}), \quad f(x_{n_2}, y_{r_2}), \quad \ldots$$

est convergente quelles que soient les deux suites

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots; \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_r, \quad \ldots,$$

pourvu qu'elles appartiennent respectivement aux intervalles (x_0, X) *et* (y_0, Y).

Nous ne donnerons pas la démonstration de cet énoncé, qu'il serait facile de calquer sur celle de la propriété que nous venons de rappeler. Nous indiquerons seulement ici comment il faut

former la suite (1). Le symbole $f(x_n, y_r)$ est l'un quelconque des termes d'une suite

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_\mu, \quad \ldots;$$

de même, $f(x_{n_1}, y_{r_1})$ est un terme d'une suite

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \ldots, \quad z'_{\mu'}, \quad \ldots$$

et ainsi des autres; la suite (1) est formée des termes z_μ, $z'_{\mu'}$, ..., les indices μ, μ', ... allant en croissant, d'une manière absolument quelconque d'ailleurs.

Nous avons montré (Chap. I, n° 15) que, si l'on remplace μ, μ', ... par n'importe quels indices respectivement plus grands, la nouvelle suite est convergente et équivalente à la suite z_μ, $z'_{\mu'}$, ...; autrement il n'y aurait pas lieu de considérer la suite (1).

III. — Dérivées partielles et différentielle totale.

5. Si une fonction de deux variables $f(x, y)$ est continue par rapport à l'une d'elles, x par exemple, *pour* chaque valeur x, lorsqu'on attribue à y une valeur constante, d'ailleurs arbitraire, il peut se faire que $f(x, y)$, considérée comme fonction de x, admette une dérivée. Ce sera la *dérivée partielle* de $f(x, y)$ par rapport à x. On la représente par le symbole $f'_x(x, y)$.

Il faut distinguer ici une sorte de dérivation qui n'a pas son analogue dans les fonctions d'une seule variable. Si $f(x, y)$ admet une dérivée partielle $f'_x(x, y)$ pour le couple (x, y), on peut, étant donnée une fraction positive ε aussi petite qu'on voudra, déterminer un nombre positif α tel que, sous la seule condition

$$|h| < \alpha,$$

on ait l'inégalité

$$\left|\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - f'_x(x, y)\right| < \varepsilon.$$

En général, α dépend à la fois de x et de y. S'il ne dépend ni de x, ni de y, la fonction $f(x, y)$ sera dite *uniformément différentiable par rapport à x, quel que soit y*. Cette propriété importante intervient dans diverses propositions du Calcul intégral, pour en limiter l'extension.

Une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles par rapport à chacune d'elles, on appelle *différentielle totale* de cette fonction la somme des produits de chacune d'elles par l'accroissement de la variable correspondante.

Ici se pose une question qui domine toute la théorie des fonctions de plusieurs variables. Donnons aux variables x et y des accroissements Δx et Δy; il en résulte pour la fonction f un accroissement

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

qu'il est naturel de comparer à la différentielle totale

$$f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Est-il possible de choisir les accroissements Δx et Δy assez petits pour que l'accroissement de la fonction et sa différentielle totale diffèrent l'un de l'autre aussi peu qu'on voudra? Telle est la question que nous avons en vue et à laquelle nous allons, dans un cas très étendu, donner une réponse affirmative.

Nos hypothèses seront les suivantes :

1° Dans la région (x_0, y_0, X, Y), la fonction f admet pour tous les couples (x, y) des dérivées partielles f'_x, f'_y déterminées, mais qui ne sont pas nécessairement finies;

2° La fonction f est uniformément différentiable par rapport à l'une des variables, x par exemple, quel que soit y; d'où il résulte que la dérivée partielle $f'_x(x, y)$ est une fonction continue *pour* chaque valeur y.

Cela posé, on a identiquement

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nous pouvons nous donner une fraction positive ε, aussi petite que nous voudrons, et déterminer un nombre β tel que, sous la seule condition

$$|\Delta x| < \beta,$$

on ait, en désignant par k un entier positif qu'il est avantageux d'introduire en vue de ce qui suivra,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - f'_x(x, y + \Delta y) \right| < \frac{\varepsilon}{k};$$

d'après l'hypothèse 2°, le nombre β ne dépend pas de y; il restera donc le même quand cette variable passera de la valeur $y + \Delta y$ à la valeur y.

D'autre part, on peut calculer un nombre positif γ tel que, sous la seule condition

$$|\Delta y| < \gamma,$$

on ait l'inégalité

$$\left|\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} - f'_y(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

En même temps, à cause de l'hypothèse 2°, on peut supposer γ assez petit pour vérifier l'inégalité

$$|f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Il est donc permis d'écrire

$$(2) \qquad \Delta f = \Delta x\left[f'_x(x, y) + 2\theta\frac{\varepsilon}{k}\right] + \Delta y\left[f'_y(x, y) + \theta'\frac{\varepsilon}{k}\right]$$
$$(-1 < \theta,\ \theta' < 1);$$

il suffit ici de prendre $k = 1$ pour obtenir l'inégalité

$$|\Delta f - f'_x\,\Delta x - f'_y\,\Delta y| < \varepsilon\left\{2|\Delta x| + |\Delta y|\right\},$$

qui répond à la question.

Remarque. — Les hypothèses sur lesquelles nous avons fondé notre démonstration sont beaucoup moins restrictives que celles sur lesquelles on s'appuie d'ordinaire, quand, appliquant la formule des accroissements finis, on suppose les dérivées partielles continues par rapport à l'une et à l'autre des variables.

Cette remarque est importante à beaucoup d'égards et notamment à celui-ci :

C'est sur la propriété précédente que repose la démonstration des conditions d'existence d'une fonction analytique d'une variable complexe; une telle fonction est, en général, holomorphe aux environs d'un point pris au hasard dans le plan, c'est-à-dire que, dans un domaine suffisamment petit, elle admet des dérivées de tous les ordres et peut être développée en série de Taylor. Il y a donc intérêt à faire le moins possible d'hypothèses pour être assuré que la fonction jouit de ces propriétés.

IV. — Fonctions composées.

6. *Existence.* — On donne une fonction de deux variables $f(u, v)$ définie dans toute la région $(u_0, v_0; U, V)$; on suppose que u et v sont deux fonctions de x,

$$u = \varphi(x), \qquad v = \psi(x),$$

définies dans un intervalle (x_0, X). Il s'agit de savoir si $f(u, v)$ est une fonction de x, qu'on appellera alors une *fonction composée* de x.

Il n'en est pas ainsi en général. Mais il y a un cas où le théorème du n° 4 permet de répondre affirmativement. C'est celui où la fonction $f(u, v)$ est continue *dans* toute la région $(u_0, v_0; U, V)$, les quatre lettres ayant les significations suivantes :

$$u_0 = \varphi(x_0), \qquad v_0 = \psi(x_0), \qquad U = \varphi(X), \qquad V = \psi(X).$$

En effet, à une valeur donnée x, intermédiaire entre x_0 et X, correspondent deux suites convergentes :

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots; \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_r, \quad \ldots.$$

Si l'on forme les couples (u_n, v_r), (u_{n_1}, v_{r_1}), ..., la suite

$$f(u_n, v_n), \quad f(u_{n_1}, v_{r_1}), \quad \ldots$$

est convergente en vertu de la continuité de $f(u, v)$. D'ailleurs, toute suite formée d'une manière analogue avec des termes affectés d'indices plus grands est équivalente à celle-ci. Cette suite, correspondant à une valeur déterminée x, définit une fonction de x.

On voit, au contraire, que, si la fonction f n'était pas continue, la suite ci-dessus pourrait être divergente et ne définirait pas une fonction de x.

7. *Dérivée.* — Pour trouver la dérivée d'une fonction composée, nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ ont des dérivées déterminées, mais pas nécessairement finies, dans l'intervalle (x_0, X);

2° La fonction $f(u, v)$ est continue dans toute la région $(u_0, v_0; \mathrm{U}, \mathrm{V})$ précédemment définie;

3° Elle est, dans toute cette région, uniformément différentiable par rapport à chacune des variables, quelle que soit l'autre, ce qui entraîne que f'_u et f'_v soient continues par rapport aux deux variables dans toute la région.

D'après l'hypothèse 2° et la démonstration du paragraphe précédent, $f(u, v)$ est une fonction de x.

D'après l'hypothèse 3°, il en est de même de f'_u et de f'_v.

On voit de plus que les deux hypothèses entraînent les hypothèses beaucoup moins restrictives que nous avons faites (n° 5) pour établir la formule qui donne l'accroissement Δf d'une fonction de deux variables; de sorte que nous pouvons appliquer cette formule.

A une valeur x correspondent deux suites convergentes :

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots; \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots,$$

et à $x + \Delta x$ deux suites convergentes $u_n + \Delta u_n$, $v_n + \Delta v_n$. Nous avons donc, d'après la formule (2),

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \left[f'_{u_n}(u_n, v_n) + \frac{2\theta\varepsilon}{k}\right]\frac{\Delta u_n}{\Delta x} + \left[f'_{v_n}(u_n, v_n) + \frac{\theta'\varepsilon}{k}\right]\frac{\Delta v_n}{\Delta x},$$

sous les seules conditions

$$(3) \qquad |\Delta u_n| < \beta, \qquad |\Delta v_n| < \gamma,$$

les nombres β et γ pouvant être calculés quand on se donne ε et k (nous déterminerons k un peu plus loin); ces nombres, en vertu de l'hypothèse 3°, ne dépendent ni de u, ni de v.

Or on peut déterminer un nombre positif α' tel que l'inégalité

$$|\Delta x| < \alpha'$$

entraîne les deux suivantes :

$$\left|\frac{\Delta u_n}{\Delta x} - \varphi'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{k}, \qquad \left|\frac{\Delta v_n}{\Delta x} - \psi'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Alors $|\Delta u_n|$ sera moindre qu'un certain nombre β'; nous le prendrons inférieur au plus petit des deux nombres β et β'. Pareillement Δv_n sera moindre qu'un certain nombre γ'; nous le prendrons inférieur au plus petit des deux nombres γ et γ'. Pour satis-

faire à ces deux nouvelles conditions, $|\Delta x|$ devra être moindre qu'un certain nombre α; nous le prendrons inférieur au plus petit des deux nombres α et α'. Moyennant cette limitation, nous aurons

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \left[f'_{u_n}(u_n, v_n) + 2\theta\frac{\varepsilon}{k}\right]\left[\varphi'(x) + \mathfrak{I}\frac{\varepsilon}{k}\right] + \left[f'_{v_n}(u_n, v_n) + \theta'\frac{\varepsilon}{k}\right]\left[\psi'(x) + \mathfrak{I}'\frac{\varepsilon}{k}\right]$$

ou bien, en effectuant,

$$(4)\qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_{u_n}\varphi' + f'_{v_n}\psi' + \frac{\varepsilon}{k}\left[\mathfrak{I}f'_{u_n} + \mathfrak{I}'f'_{v_n} + 2\theta\varphi' + \theta'\psi' + (2\mathfrak{I}\theta + \mathfrak{I}'\theta')\frac{\varepsilon}{k}\right].$$

Soit M la plus grande des valeurs absolues de f'_u et de f'_v dans toute la région, valeurs qui sont certainement limitées, puisque ces deux fonctions, étant continues *dans* la région, restent finies. Le troisième terme du second membre est évidemment inférieur en valeur absolue à

$$\frac{\varepsilon}{k}\left[2M + 2|\varphi'(x)| + |\psi'(x)| + \frac{3\varepsilon}{k}\right].$$

On peut donc, connaissant seulement x, disposer de k de manière que ce terme complémentaire soit en valeur absolue inférieur à ε. Dès lors, quand on fait tendre Δx vers zéro suivant une loi quelconque, les quotients $\Delta f : \Delta x$ forment une suite équivalente à celle qui a pour terme général

$$f'_{u_n}(u_n, v_n)\varphi'(x) + f'_{v_n}(u_n, v_n)\psi'(x).$$

Or celle-ci est convergente, car f'_u et f'_v sont des fonctions continues de u et de v *dans* toute la région considérée. Donc la fonction composée f admet une dérivée donnée par la formule

$$\frac{df}{dx} = f'_u(u, v)\varphi'(x) + f'_v(u, v)\psi'(x).$$

Ainsi se trouve établie, sous les hypothèses spécifiées, la règle de différentiation des fonctions composées [1].

---

[1] On a dû remarquer, dans cette démonstration, le rôle de l'hypothèse d'après laquelle β et γ sont indépendants de u et de v. S'il n'en était pas ainsi, il se pourrait que β ou γ tendît vers zéro, quand l'indice n croît indéfiniment. Le nombre α tendrait alors aussi vers zéro et il serait impossible d'assigner un intervalle, si petit qu'il fût, où l'égalité (4) eût lieu.

On en déduirait sans peine la dérivée de la somme $u+v$, du produit uv, du quotient $u:v$ de deux fonctions douées de dérivée dans un intervalle (x_0, X); en effet, les trois fonctions $f(u, v)$ correspondantes sont continues et uniformément différentiables par rapport à u et à v dans toute région (la dernière, pourvu que v ne s'annule pas).

Mais nous n'insisterons pas sur ces résultats, qui s'obtiennent directement (Chap. V, n° 7).

V. — Formule des accroissements finis pour les fonctions de deux variables.

8. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables qui, dans la région $(x_0, y_0; X, Y)$, sera supposée uniformément différentiable par rapport à chacune des variables quelle que soit l'autre, et soient (x, y), $(x+h, y+k)$ deux couples appartenant à cette région. Nous allons démontrer qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) - f(x, y) \\ &\quad = hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf'_y(x+\theta h, y+\theta k), \end{aligned}$$

θ étant un certain nombre compris entre zéro et l'unité.

A cet effet, nous considérerons la fonction auxiliaire

$$f(x+ht, y+kt),$$

qui dépend de la nouvelle variable t, par l'intermédiaire des deux fonctions

$$u = x+ht, \qquad v = y+kt.$$

Des hypothèses que nous faisons ici il résulte que $f(u, v)$ est continue *dans* une région relativement aux variables u et v; c'est donc (n° 6) une fonction composée de t

$$F(t) = f(u, v)$$

dans un intervalle qui comprend zéro et l'unité, et tout revient à exprimer la différence

$$F(1) - F(0) = f(x+h, y+k) - f(x, y).$$

Nous démontrerons dans un instant que $F(t)$ est uniformément

différentiable dans cet intervalle, qui comprend $(0, 1)$: on a donc, en appliquant le théorème des accroissements finis (Chap. VI, n° 5),

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Or la règle du paragraphe précédent donne

$$F'(t) = hf'_u + kf'_v.$$

Remplaçant u et v par leurs valeurs et faisant $t = 1$, nous obtenons la formule annoncée.

Prouvons maintenant que $F(t)$ est uniformément différentiable. Soit t' une valeur voisine de t, dans l'intervalle $(0, 1)$ et posons

$$u' = x + ht', \quad v' = y + kt'.$$

Je dis qu'étant donnée une fraction positive ε, aussi petite qu'on voudra, on peut trouver un nombre α indépendant de t et tel que, sous la seule condition

$$|t' - t| < \alpha,$$

on ait

$$\left| \frac{F'(t) - F(t)}{t' - t} - F'(t) \right| < \varepsilon.$$

Cette inégalité n'est autre que

$$\left| \frac{f(u', v') - f(u, v)}{t' - t} - hf'_u(u, v) - kf'_v(u, v) \right| < \varepsilon.$$

Nous écrirons son premier membre comme suit :

$$\left| h\frac{f(u', v') - f(u, v')}{u' - u} - hf'_u(u, v) + k\frac{f(u, v') - f(u, v)}{v' - v} - kf'_v(u, v) \right|.$$

Cette expression est visiblement inférieure à la somme

$$\begin{aligned} S = \; & |h| \left| \frac{f(u', v') - f(u, v')}{u' - u} - f'_u(u, v) \right| \\ & + |k| \left| \frac{f(u, v') - f(u, v)}{v' - v} - f'_v(u, v) \right|. \end{aligned}$$

Or, d'après nos hypothèses, $f(u, v)$ est uniformément différentiable par rapport à chacune des variables, quelle que soit l'autre. On peut donc, étant donnée une fraction positive η aussi petite qu'on voudra, déterminer deux nombres β et γ, *indépen-*

dants de u et de v, tels que les deux inégalités

$$|u'-u|<\beta, \qquad |v'-v|<\gamma$$

entraînent les deux suivantes :

$$\left|\frac{f(u',v')-f(u,v')}{u'-u}-f'_u(u,v')\right|<\eta,$$
$$\left|\frac{f(u,v')-f(u,v)}{v'-v}-f'_v(u,v)\right|<\eta,$$

car u' et v' appartiennent comme u et v à la région dans laquelle $f(u, v)$ jouit de la propriété invoquée. On a donc

$$\frac{f(u',v')-f(u,v')}{u'-u}=f'_u(u,v')+\vartheta\eta \qquad (-1<\vartheta<1),$$
$$\frac{f(u,v')-f(u,v)}{v'-v}=f'_v(u,v)+\vartheta\eta \qquad (-1<\vartheta'<1).$$

Mais, à cause de la continuité de f'_u par rapport à v', nous pouvons supposer γ assez petit pour qu'on ait

$$f'_u(u,v')-f'_u(u,v)=\theta_1\eta \qquad (-1<\theta_1<).$$

Tenant compte de ces divers résultats, on trouve

$$S=\eta\{|\vartheta+\theta_1||h|+|\vartheta'||k|\},$$

ou bien

$$S<\{2|h|+|k|\}\eta.$$

Il est donc très facile de disposer de η de manière à rendre S plus petit que la fraction donnée ε, ce qui achève la démonstration.

VI. — Fonctions implicites.

9. Étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, on a fréquemment à se demander si, pour chacune des valeurs x comprises dans un certain intervalle, il existe un nombre y qui, associé avec x, rende $f(x, y)$ nulle, ou plutôt une suite convergente $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ telle que la suite

$$f(x,y_1),\quad f(x,y_2),\quad \ldots,\quad f(x,y_n),\quad \ldots$$

ait pour limite zéro. On peut, sous certaines conditions que nous

allons préciser, démontrer l'existence d'une pareille suite, qui définira y comme *fonction implicite* de x.

Nous supposerons que, dans une certaine région $(a, b; \mathrm{A}, \mathrm{B})$, la fonction $f(x, y)$ soit uniformément différentiable par rapport à chacune des variables, quelle que soit l'autre. A un certain nombre x_0, appartenant à l'intervalle (a, A), correspondra, par hypothèse, une suite convergente $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ comprise dans l'intervalle (b, B) et telle que $f(x_n, y_n)$ tende vers zéro quand n croît indéfiniment. Enfin la dérivée partielle $f'_y(x, y)$ ne s'annulera pas dans la région considérée; c'est-à-dire que son module restera, dans toute la région, supérieur à un nombre qu'on pourrait calculer.

Soit y_0 un terme de rang suffisamment éloigné dans la suite y_1, $y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Nous montrerons qu'à tout nombre $x_0 + h$, voisin de x_0, correspond une suite convergente $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ et *une seule* telle que la suite

$$f(x_0 + h, y_0 + k_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge vers zéro.

Appliquons la formule des accroissements finis au développement de

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0),$$

le couple $(x_0 + h, y_0 + k)$ étant provisoirement quelconque dans la région considérée. Nous aurons

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0 + y_0) &+ hf'_{x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ &+ kf'_{y_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \end{aligned} \right\} \quad (0 < \theta < 1),$$

et le premier terme du second membre sera, en valeur absolue, aussi petit qu'on voudra.

Je dis que, h étant donné, on pourra disposer de $|k|$, de manière que le second membre ait le signe de k. En effet, les dérivées partielles f'_x et f'_y étant continues dans la région considérée, leurs modules sont compris respectivement entre des limites inférieure et supérieure

$$m < |f'_x| < \mathrm{M}, \qquad n < |f'_y| < \mathrm{N}.$$

En conséquence, on a nécessairement

$$|hf'_{x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)| < |h|\,\mathrm{M}, \qquad |kf'_{y_0})x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) > |k|\,n.$$

Il suffit donc de prendre

$$|k| > |h| \frac{M}{n}$$

pour que le terme en k donne son signe au second membre : or cela est possible, puisque n, en vertu de l'hypothèse faite sur f'_y, n'est certainement pas nul. Ayant ainsi choisi k, on est assuré que les deux nombres

$$f(x_0 + h, y_0 - k), \quad f(x_0 + h, y_0 + k)$$

seront *de signe contraire*. On peut d'ailleurs faire $|h|$ assez petit pour que les deux valeurs $(x_0 \pm k)$ appartiennent à l'intervalle (b, B), où la fonction f jouit, entre autres propriétés, de celle d'être, quand x reste constant, une fonction continue de y, et de plus une fonction croissante (ou décroissante), puisque sa dérivée f'_y, ne s'annulant pas, garde dans tout cet intervalle le signe de $f'_{y_0}(x_0, y_0)$. Dès lors, en vertu de deux théorèmes démontrés au Chapitre IV (nos 2 et 3), l'équation

$$f(x_0 + h, y) = 0$$

admet *une* racine et *une seule* comprise entre $y_0 - k$ et $y_0 + k$. Par là est démontrée l'existence d'une fonction implicite et d'une seule, qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Cette fonction y est continue pour toute valeur de x pour laquelle elle existe; car à l'accroissement h de la variable correspond, pour y, un accroissement k qui est un terme de la suite k_1, k_2, ... dont l'existence a été implicitement établie ci-dessus, et l'on a vu que les modules de ces termes sont dans un rapport fini avec $|h|$.

Mais il y a plus. Lorsque k, dans la formule (5), désigne cet accroissement, le premier terme, de même que $f(x_0, y_0)$, est aussi petit qu'on veut, et cela quel que soit h. On voit donc que cette équation peut s'écrire

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_{x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f'_{y_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)} + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Comme, d'autre part, les dérivées partielles f'_x et f'_y sont des

fonctions continues des deux variables, elles se réduisent respectivement à $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_{y_0}(x_0, y_0)$ quand h devient nul.

De tout cela nous concluons que la fonction implicite y *admet une dérivée,* et que cette dérivée est donnée par la formule

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = -\frac{f'_{x_0}(x_0, y_0)}{f'_x(x_0, y_0)},$$

où y_0 a la signification que nous avons précisée plus haut.

VII. — Équation différentielle du premier ordre.

10. Étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$ définie dans une certaine région et assujettie à des conditions, d'ailleurs très larges, que nous indiquerons tout à l'heure, il s'agit de trouver une fonction y de la seule variable x dont la dérivée ait pour tout nombre x la même valeur que $f(x, y)$ et qui, pour $x = x_0$, prenne une valeur donnée y_0. La solution de ce problème comporte une double recherche : d'abord, celle du procédé numérique par lequel on peut calculer les valeurs de y pour les diverses valeurs de la variable; ensuite, celle de l'amplitude de l'intervalle dans lequel ce procédé est applicable et qui ne peut, bien entendu, jamais s'étendre au delà de l'intervalle dans lequel est définie la fonction $f(x, y)$ quand on y attribue à y une valeur constante.

Nous ferons trois hypothèses sur la fonction $f(x, y)$.

1° Elle est définie dans une région comprenant le couple (x_0, y_0), c'est-à-dire pour tous les couples (x, y) satisfaisant aux deux inégalités

$$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b,$$

où a et b sont deux nombres positifs donnés.

2° La fonction $f(x, y)$ est continue *dans* toute cette région au sens précisé plus haut (n° 2), c'est-à-dire que, s'étant donné une fonction positive ε aussi petite qu'on voudra, on peut trouver un nombre η dépendant seulement de ε et tel que si (x, y) et (x', y') sont deux couples quelconques appartenant à la région et assujettis aux seules conditions

$$|x' - x| < \eta, \qquad |y' - y| < \eta,$$

on ait l'inégalité

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon.$$

3° On peut calculer un nombre positif k tel que l'on ait

$$\left| \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} \right| < k,$$

x, y, y' étant absolument quelconques dans la région considérée. Cette dernière hypothèse, due à Lipschitz, est évidemment réalisée quand la fonction $f(x, y)$ admet une dérivée f'_y toujours finie.

11. Cela posé, considérons une valeur x, telle que le module de $x - x_0$ soit inférieur au plus petit des deux nombres a et b : M, M étant la limite supérieure de la fonction $f(x, y)$ dans toute la région où elle est définie; puis divisons l'intervalle (x_0, x) en n autres, au moyen des nombres intermédiaires $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; enfin, calculons une suite de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les formules

$$\begin{gathered} y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n - y_{n-1} = (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{gathered}$$

Il faut d'abord montrer que les valeurs ainsi calculées ne sortent pas de la région dans laquelle $f(x, y)$ est *définie*. Or, si l'on ajoute membre à membre les r premières des équations ci-dessus et qu'on remplace $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots$, par le nombre plus grand M, on trouve

$$y_r - y_0 < \mathrm{M} |x_r - x_0|,$$

parce que les x se succèdent par ordre de grandeur croissante (ou décroissante), et comme on a

$$|x_r - x_0| < \frac{b}{\mathrm{M}},$$

il en résulte bien

$$|y_r - y_0| < b.$$

Ainsi, y_r est compris dans la région considérée, quel que soit l'indice r, entre 1 et n.

Il s'agit maintenant de prouver que, par ce procédé, nous formons effectivement une fonction y de x; c'est-à-dire que, si nous

multiplions le nombre des intervalles et si nous en diminuons indéfiniment l'amplitude suivant une loi quelconque, les diverses valeurs y_n correspondant au même nombre x forment une suite convergente.

Considérons d'abord une première loi de subdivision, dans laquelle on ne fait que fractionner les anciens intervalles, en conservant leurs extrémités. La première division que nous envisageons est telle que, si x_i et x_{i+1} en sont deux termes consécutifs quelconques, on ait

$$(6) \qquad |f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)| < \varepsilon,$$

ε étant une fraction qu'on se donne. C'est ce que l'on peut toujours réaliser : en effet, quand y_i est connu, y_{i+1} est fourni par la formule

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i)$$

qui entraîne l'inégalité

$$|y_{i+1} - y_i| < M |x_{i+1} - x_i|;$$

on peut donc choisir $x_{i+1} - x_i$, dont on dispose, de façon à avoir

$$|x_{i+1} - x_i| < \eta, \qquad |y_{i+1} - y_i| < \eta,$$

inégalités qui, d'après l'hypothèse 2°, entraînent l'inégalité dont il s'agit.

Nous passons maintenant à une subdivision dans laquelle tous les nombres tels que x_i et x_{i+1} sont conservés, mais qui en intercale d'autres, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\alpha-1}$, entre ces deux-là.

Nous désignerons par $y'_i, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\alpha-1}, y'_{i+1}$, les valeurs de y, toujours calculées par le même procédé, qui correspondent aux nombres $x_i, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\alpha-1}, x_{i+1}$ et nous nous proposerons, supposant connue la différence $y'_i - y_i$, d'évaluer la différence $y'_{i+1} - y_{i+1}$. Or, nous avons

$$\upsilon_1 - y'_i = f(x_i, y'_i)(\xi_1 - x_i),$$
$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = f(\xi_1, \upsilon_1)(\xi_2 - \xi_1).$$

A cause de l'inégalité (6), cette dernière relation peut s'écrire

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = [f(x_i, y'_i) + \theta_2 \varepsilon](\xi_2 - \xi_1) \qquad (-1 < \theta_2 < 1).$$

On aura des expressions analogues pour les différences suivantes, dont la dernière est

$$y'_{i+1} - \upsilon_{\alpha-1} = [f(x_i, y'_i) + \theta_{\alpha-1}\varepsilon](x_{i+1} - \xi_{\alpha-1}) \qquad (-1 < \theta_{\alpha-1} < 1).$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités; nous trouvons

$$(7) \qquad y'_{i+1} - y'_i = [f(x_i, y'_i) + \mathfrak{I}\varepsilon](x_{i+1} - x_i) \qquad (-1 < \mathfrak{I} < 1),$$

parce que les x se succèdent par ordre de grandeur croissante (ou décroissante).

Faisons maintenant usage de l'hypothèse 3°. Elle nous permet d'écrire

$$f(x_i, y'_i) = f(x_i, y_i) + \theta k(y'_i - y_i) \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Substituons cette expression dans la relation (7) et rapprochons-en celle-ci :

$$y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Nous obtiendrons, par soustraction,

$$(y'_{i+1} - y_{i+1}) - (y'_i - y_i) = (x_{i+1} - x_i)[\theta k(y'_i - y_i) + \theta\varepsilon],$$

d'où résulte

$$|(y'_{i+1} - y_{i+1}) - (y'_i - y_i)| < |x_{i+1} - x_i| \{k|y'_i - y_i| + \varepsilon\},$$

ou, à plus forte raison,

$$|y'_{i+1} - y_{i+1}| - |Y - y| < |x_{i+1} - x_i| \{k|y'_i - y_i| + \varepsilon\}.$$

Telle est l'inégalité que nous avions en vue. Nous la mettrons sous la forme équivalente

$$|y'_{i+1} - y_{i+1}| + \frac{\varepsilon}{k} < \left[|y'_i - y_i| + \frac{\varepsilon}{k}\right]\{1 + k|x_{i+1} - x_i|\},$$

et nous l'appliquerons à tous les nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x$ de la première division en nous rappelant que $y'_0 = y_0$, de sorte que, pour $i = 0$, on a simplement

$$|y'_1 - y_1| + \frac{\varepsilon}{k} < \frac{\varepsilon}{k}\{1 + k|x_1 - x_0|\}.$$

Multiplions cette inégalité membre à membre avec les suivantes

$$|y'_{i+1} - y_{i+1}| - \frac{\varepsilon}{k} < \left[|y'_i - y_i| + \frac{\varepsilon}{k}\right]\{1 + k|x_{i+1} - x_i|\}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

nous obtiendrons

$$|y'_n - y_n| + \frac{\varepsilon}{k} < \frac{\varepsilon}{k}\{1 + k|x_1 - x_0|\}\{1 + k|x_2 - x_1|\}\dots\{1 + k|x - x_{n-1}|\}.$$

Or, quand kx est positif, on a

$$1 + kx < e^{kx}.$$

Les x_i se succèdent par ordre de grandeur croissante ou décroissante; l'inégalité précédente pourra donc s'écrire

$$(8) \qquad |y'_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{k}\{e^{k|x-x_0|} - 1\}.$$

Nous avons précisé quelle était la subdivision à partir de laquelle cette inégalité a lieu. Elle prouve que les y obtenus par le procédé indiqué, en fractionnant de plus en plus les intervalles, tout en conservant à chaque nouvelle subdivision les extrémités des intervalles de la subdivision précédente, forment une suite convergente.

Donnons-nous maintenant deux lois de subdivision absolument quelconques; à un certain degré de fractionnement de l'intervalle (x_0, x), on aura, pour l'un et pour l'autre mode de subdivision,

$$|f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)| < \varepsilon.$$

Soient alors Y et y les valeurs que les deux lois de subdivision font correspondre au nombre x; il suffit de superposer les deux divisions et de les comparer l'une et l'autre à la division auxiliaire ainsi obtenue pour conclure de l'inégalité (8)

$$|Y - y| < \frac{2\varepsilon}{k}\{e^{k|x-x_0|} - 1\}.$$

En conséquence, nous avons bien, par notre procédé, formé une fonction y de la variable x, dans le sens que nous donnons à ce mot. Cette fonction est égale à y_0 pour $x = x_0$, et elle est définie de part et d'autre de x_0 dans un intervalle dont l'amplitude est égale au plus petit des deux nombres a et b : M.

12. Il reste à faire voir que la fonction y formée par le procédé ci-dessus satisfait à la question, c'est-à-dire qu'elle admet

une dérivée égale à $f(x, y)$. Précisons le sens de ces termes.

Pour la valeur x, la fonction est définie par une certaine suite convergente que nous savons former et pour la valeur voisine x' par une autre suite convergente ; nous pouvons, sans inconvénient, représenter ces deux suites, l'une par $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, l'autre par $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots$.

Il faut montrer que, se donnant une fraction positive ε', si petite qu'elle soit, on peut prendre $|x' - x|$ assez petit, mais d'ailleurs quelconque, pour qu'on ait

$$(9) \qquad \left| \frac{y'_n - y_m}{x' - x} - f(x, y_m) \right| < \varepsilon'$$

pour des valeurs quelconques, mais suffisamment grandes, de m et n. Or on sait (Chap. V, n° 4) qu'il suffit de prouver l'existence de la dérivée, à l'aide d'une certaine suite convergente, définissant la fonction : l'existence de cette dérivée se trouve par cela même établie, lorsque la fonction est définie par toute autre suite équivalente.

Nous pouvons donc supposer la suite $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots$ obtenue grâce à des subdivisions de plus en plus serrées de l'intervalle (x_0, x') mais dans lesquelles le nombre x sera toujours pris comme limite d'un intervalle. Cette remarque nous permet d'opérer, pour former la suite y'_n, sur les nombres x et x', comme nous avons opéré plus haut (n° 11) en vue d'obtenir la suite convergente qui définit y pour la valeur x. Nous considérerons donc l'intervalle (x, x') en faisant correspondre au nombre x la valeur y_m, et nous pourrons prendre comme premier terme y'_1 de la suite à former le nombre obtenu par l'application de notre procédé général à l'intervalle (x, x'), savoir :

$$y'_1 = y_m + (x' - x) f(x, y_m).$$

Après un nombre quelconque de fractionnements successifs de l'intervalle (x, x'), nous obtiendrons, par l'application du même procédé, une certaine valeur y'_n et nous savons que l'on a, les notations du n° 11 étant ici changées,

$$|y'_1 - y'_n| < \frac{\varepsilon}{k} \left\{ e^{k|x'-x|} - 1 \right\},$$

pourvu que l'unique intervalle (x, x') de la division initiale satisfasse aux deux conditions

$$|x'-x|<\eta, \quad M|x'-x|<\eta,$$

grâce auxquelles a lieu l'inégalité

$$|f(x', y'_1)-f(x, y_m)|<\varepsilon.$$

On peut alors écrire

$$y'_1-y'_n=\theta\frac{\varepsilon}{k}\left\{e^{k|x'-x|}-1\right\} \qquad (-1<\theta<1)$$

et, remplaçant y'_1 par sa valeur, on trouve

$$\frac{y'_n-y_m}{x'-x}=f(x, y_m)-\frac{\theta\varepsilon\left\{e^{k|x'-x|}-1\right\}}{k(x'-x)}.$$

Or on peut prendre ε, et par suite η, assez petits pour que l'on ait

$$(10) \qquad \frac{\varepsilon\left\{e^{k|x'-x|}-1\right\}}{k|x'-x|}<\frac{\varepsilon'}{2}.$$

D'autre part, si l'indice m est suffisamment grand, $f(x, y_m)$ différera de $f(x, y_{m+p})$ de moins de $\varepsilon' : 2$ à cause de la continuité de la fonction f par rapport à y. De là et de tout ce qui précède résulte bien l'inégalité (9) qu'il s'agissait d'établir.

Il est facile d'aller plus loin et de montrer que *la fonction y est uniformément différentiable* dans tout l'intervalle où elle est définie. En effet, l'intervalle (x, x') étant très petit, le module de $x'-x$ est moindre que l'unité et l'on vérifiera, à plus forte raison, l'inégalité (10) si l'on détermine ε par la condition

$$\frac{\varepsilon}{k}(e^k-1)<\frac{\varepsilon'}{2}.$$

Mais à un nombre ε ainsi choisi correspond, pour le module de $x-x'$, une limite supérieure η (ou $\eta : M$ si M est plus grand que l'unité) qui est absolument indépendante de x d'après sa définition même (n° 11). Donc la fonction y est une fonction uniformément différentiable de x.

13. Théorème. — *L'intégrale y, définie par ce qui précède, est la seule fonction uniformément différentiable qui satisfasse à l'équation*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

et qui prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Supposons, en effet, qu'il en existe une autre; on pourra la représenter par $y + z$.

La fonction $z(x)$ devra se réduire à zéro pour $x = x_0$, être uniformément différentiable et satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y + z) - f(x, y). \tag{11}$$

Or, en vertu de l'hypothèse 3° du n° 10, on a

$$\frac{f(x, y + z) - f(x, y)}{z} = k\theta(x, y, z),$$

θ étant une fonction de x, de y et de z dont la valeur reste comprise entre -1 et $+1$. C'est une fonction continue de x, de y et de z dans toute la région où elle est définie, sauf pour $z = 0$. Si l'on suppose la fonction z exprimée au moyen de x et qu'on la substitue ainsi que y dans la fonction θ, la différence $f(x, y + z) - f(x, y)$ est une fonction de x (n° 6) parce que y et z, étant uniformément différentiables, sont des fonctions continues de x. Cette différence divisée par z est une fonction de x; donc enfin θ devient une fonction de x, que nous appellerons $\psi(x)$ et dont le module restera inférieur à l'unité. Par suite, l'équation (11) prend la forme

$$\frac{dz}{dx} = kz\psi(x).$$

Elle est évidemment vérifiée si la fonction z est *constamment nulle*. Nous allons montrer qu'on ne peut supposer $z \neq 0$. Dans cette hypothèse, en effet, on divisera les deux membres par z, ce qui donne

$$\frac{d \log z}{dx} = k\psi(x).$$

Or, z étant uniformément différentiable, $\log z$ l'est aussi et, en

vertu d'une proposition fondamentale (Chap. IX, n° 5) sur les fonctions primitives uniformément différentiables, on a nécessairement

$$\log z - \log z_1 = k \int_{x_1}^{x} \psi(x)\, dx,$$

le nombre x_1 étant arbitraire dans un certain intervalle qui comprend x_0, mais ne pouvant être pris égal à x_0 lui-même (à cause de la condition $z = 0$ pour $x = x_0$); quant à z_1, c'est la valeur qu'on peut assigner arbitrairement à z pour $x = x_1$. On peut donc écrire

$$\log \frac{z}{z_1} = k \int_{x_1}^{x} \psi(x)\, dx.$$

Mais, d'après ce que nous savons de la fonction $\psi(x)$, on a

$$\left| \int_{x_1}^{x} \psi(x)\, dx \right| < |x_1 - x|,$$

d'où résulte

$$\left| \log \frac{z}{z_1} \right| < k\, |x_1 - x|.$$

Or on peut choisir x_1 aussi voisin qu'on veut de x_0. Alors, à cause de la continuité de z, la valeur z_1 est très petite, de sorte que l'inégalité précédente est impossible. En conséquence, la seule hypothèse qu'on puisse faire sur z est que cette fonction soit constamment nulle, ce qui démontre le théorème.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT V

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I.

SUITES CONVERGENTES ET SÉRIES NUMÉRIQUES.

I. Premières propriétés des suites convergentes 16
II. Suites rationnelles et suites irrationnelles 21
III. Suites équivalentes 25
IV. Propositions relatives à la convergence des suites 28
V. Séries numériques 31

CHAPITRE II.

DÉFINITION GÉNÉRALE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.
FONCTIONS FINIES.

I. Intervalles et variable 38
II. Fonctions explicites et fonctions à déterminer 39
III. Fonctions finies : limites, oscillation moyenne 42

CHAPITRE III.

FONCTIONS A OSCILLATION MOYENNE NULLE OU FONCTIONS INTÉGRABLES.

I. Condition pour qu'une fonction soit intégrable 50
II. Fonctions continues dans un intervalle 53
III. Fonctions continues pour une valeur de la variable 58
IV. Formation de fonctions continues 59
V. Fonctions à oscillation totale limitée 60
VI. Fonctions continues à oscillation totale limitée ou fonctions rectifiables 67

CHAPITRE IV.

PROBLÈME INVERSE DU CALCUL DES FONCTIONS. FONCTIONS INVERSES ; EXPONENTIELLE ET LOGARITHME.

Pages.

I. Position du problème 73
II. Existence des racines 74
III. Fonction inverse d'une fonction continue et croissante 78
IV. Fonctions définies à l'aide d'un paramètre auxiliaire 80
V. Équations fonctionnelles 81
VI. La fonction exponentielle considérée comme solution d'une équation fonctionnelle 82
VII. Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle 87
VIII. Fonction inverse de l'exponentielle : logarithme 91

CHAPITRE V.

DÉRIVÉES. PREMIERS EXEMPLES DE FONCTIONS UNIFORMÉMENT DIFFÉRENTIABLES.

I. Cas où la fonction est définie par des nombres 93
II. Cas où la fonction est définie par des suites convergentes 95
III. Variations de la fonction et signes de la dérivée. Fonctions à dérivée nulle 98
IV. Formation de fonctions admettant une dérivée. Dérivée d'une fonction de fonction 102
V. Fonctions uniformément différentiables 104
VI. La fonction x^m 105
VII. Dérivée de la fonction exponentielle 107

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS UNIFORMÉMENT DIFFÉRENTIABLES.

I. Premières propriétés 111
II. Propositions relatives à la variation des fonctions uniformément différentiables 117
III. Dérivée des fonctions inverses 121
IV. Formules de Taylor et de Maclaurin 125

CHAPITRE VII.

SÉRIES DE FONCTIONS.

I. Continuité des séries de fonctions 133
II. Dérivés des séries 136
III. Fonctions sans dérivée 139

CHAPITRE VIII.

SÉRIES ENTIÈRES.

Pages.

I. Intervalle de convergence et séries dérivées 145
II. Fonctions analytiques et séries entières 148
III. Différentiation des séries entières; développements en série 151
IV. Propriétés relatives aux racines d'une série entière et de ses dérivées. 155
V. Application de la théorie des séries entières aux fonctions circulaires. 160

CHAPITRE IX.

INTÉGRALES ET FONCTIONS PRIMITIVES. SÉRIE DE FOURIER.

I. Fonctions ayant une intégrale donnée 167
II. Propriétés des intégrales 169
III. Fonctions primitives 172
IV. Extension de la notion d'intégrale 174
V. Intégrales singulières 180
VI. Formule de Fourier 185

CHAPITRE X.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES ET APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

I. Définition d'une fonction de deux variables 188
II. Continuité des fonctions de deux variables 189
III. Dérivées partielles et différentielle totale 192
IV. Fonctions composées 195
V. Formule des accroissements finis pour les fonctions de deux variables. 198
VI. Fonctions implicites 200
VII. Équation différentielle du premier ordre 203

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

26126 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

[redacted] C.1
uvres scientifiques,
[redacted]

Q113
R65
V1

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
Stanford, California

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la Théorie des ensembles.* Grand in-8; 1898 ..... 3 fr. 50 c.

BOREL (Émile). — **Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions.** 4 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières; 1900 ..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes; 1901 ..... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs professées au Collège de France, recueillies et rédigées par ROBERT D'ADHÉMAR ; 1902 ..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France, recueillies et rédigées par LUDOVIC ZORETTI; 1903 ..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries de polynomes ..... (*Sous presse.*)

GODEFROY (Maurice), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — **Théorie élémentaire des séries.** *Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma.* Avec une Préface de L. SAUVAGE, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Un volume grand in-8 de VIII-266 pages, avec figures; 1903 ..... 8 fr.

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.**

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques.* Grand in-8 de VI-620 pages, avec 52 figures; 1902 ..... 20 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* ..... (*En préparation.*)

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries;* 1886 ..... 15 fr.

IIe PARTIE : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888 ..... 20 fr.

IIIe PARTIE : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891 ..... 8 fr. 50 c.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse.** *Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures; 1897 ..... 7 fr. 50 c.

26126 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.